

拓扑学教程

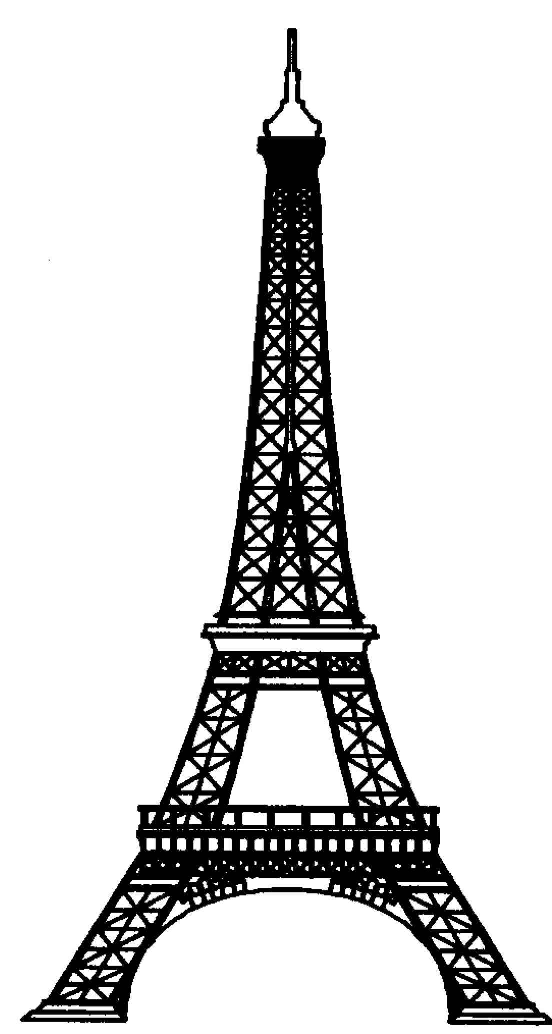
——拓扑空间和距离空间、数值函数、拓扑向量空间

（第2版）

G. 肖盖 著
史树中 王耀东 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



数学天元基金资助项目

拓扑学教程

——拓扑空间和距离空间、数值函数、拓扑向量空间

（第2版）

□ G. 肖盖 著
□ 史树中 王耀东 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图字: 01–2008–0938 号

Gustave Choquet
Cours de topologie

图书在版编目 (CIP) 数据

拓扑学教程: 拓扑空间和距离空间、数值函数、拓扑向量空间 (第2版) / (法) 肖盖著; 史树中, 王耀东译. 北京: 高等教育出版社, 2009. 7
(法兰西数学精品译丛)
ISBN 978–7–04–026362–6

I.拓... II.①肖...②史...③王... III.拓扑–研究生–教材 IV. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 086738 号

策划编辑	赵天夫	**责任编辑**	赵天夫	**封面设计**	张　楠
版式设计	陆瑞红	**责任校对**	金　辉	**责任印制**	韩　刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010–58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400–810–0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010–58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	中原出版传媒投资控股集团 北京汇林印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com

开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2009 年 7 月第 1 版
印　　张	19.25	**印　　次**	2009 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	380 000	**定　　价**	49.00 元

物料号　26362–00

《法兰西数学精品译丛》编委会

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦兹及利翁斯等等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是：在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的薰陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的

限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

出版者的话

本书的原版书为 G. Choquet 教授所著的《分析教程》的第二卷《拓扑学》(*Cours d'analyse Tome II: Topologie*), 该书至今已出了三版[1], 并有英文、西班牙文译本. 中译本由史树中、白继祖根据 1969 年法文修订版翻译, 我社于 1988 年分上下两册出版 (下册因故未能出版), 书名为《分析与拓扑》.

本次中译本根据法文版 2000 年的第 2 版译出, 此时原书已更名为《拓扑学教程》(*Cours de topologie*), 在翻译过程中译者参考了 1988 年我社出版的中译本《分析与拓扑》.

史树中老师在翻译本书的过程中不幸逝世, 王耀东老师继续完成了本书的翻译工作. 在此, 我们对他们的辛勤工作表示由衷的感谢. 我们也感谢白继祖先生对本书的贡献.

[1] 分别为:

- G. Choquet, *Cours d'analyse Tome II: Topologie*, Masson, 1964.
- G. Choquet, *Cours d'analyse Tome II: Topologie*, Masson, 1969. (修订版)
- G. Choquet, *Cours de topologie*, 2e édition, Dunod, 2000. (第 2 版)

《分析与拓扑》译者序

本书是法国科学院院士、著名数学家 G. Choquet 教授所著的《分析教程》的第二卷《拓扑学》的译本. 原书是法国硕士学位的基础教材. 它是作者多年教学的结晶, 内容深入浅出, 富有启发性, 并附有大量习题. 正如作者在序言中所说: "本书的目的在于使大学生在一个尽可能简单的框架中了解某些现代分析的强有力的工具及其应用." 因此, 本书的着眼点在于深入剖析分析中的一些基本概念和基本工具, 较少涉及一些过于艰深的专门概念和定理, 因而使它对于数学研究的任何一个专业方向都是很有益的.

《分析教程》的第一卷《代数》和第三卷《积分学和微分学》都从未公开出版过, 而第二卷《拓扑学》则已出了两版, 并有英文、西班牙文译本. 本书根据它的 1969 年的修订本译出. 译者为了指出它并非是一本真正的拓扑学教程, 而把它改称为《分析与拓扑》. 但是我们没有改变原书的章节编号, 因为这将牵一发动全身, 带来很多问题. 这样一来, 本书将只包含第五、六、七章, 而没有前面的各章. 同时, 书中又常常援引前面的章节的结果, 为帮助读者阅读, 我们就加了很多译者注, 补充了许多书中所需要的概念. 然而, 由于某些概念 (主要是集合论中的概念) 无法用一个简单的定义说清楚, 我们并未做得十分彻底, 诸如可数集、势、基数等我们都没有一一加注. 不熟悉这些概念的读者可参考有关教本, 好在这类教本在国内都不难找到. 此外, 原书还有少量印刷错误和其他错误, 大部分我们都不加指出地进行改正, 只在一些较紧要的地方才加了译者注.

作者曾经是法国布尔巴基 (N. Bourbaki) 学派中的活跃分子, 曾为布尔巴基的著作作出很多贡献. 本书中的布尔巴基影响也是显而易见的, 即从代数结构、拓扑结构和序结构三方面来分析数学对象以及它们间的关系. 书中也采用了著名的布尔巴基

的符号 "Z", 表示这里有一个理解上的 "危险的转折" 或 "弯路小心", 要求读者仔细辨析. 但是作者并未追求布尔巴基著作的过分系统、过分干净的写法. 我们常常会发现在本书中, 前一章要用到后一章的材料, 或者涉及更不相干的其他数学学科的材料. 这种做法也许会给读者带来一点困难, 但总的来说这将对开阔读者的思路是有好处的. 此外, 本书各章后面的大量习题无疑是本书的最宝贵的资料之一, 愿意真正弄通本书的读者应尽可能多做后面的习题. 不过有些地方习题与课文内容有点重复, 对此我们没有都一一指出.

本书由白继祖译出前两章的初稿, 史树中译出后一章的初稿, 然后再由史树中统一校订. 我们两人都用本书进行过教学 (其中白继祖是在刚果布拉柴维尔大学直接用法语讲授的). 在教学过程中, 学生们曾发现不少原书有的少量错误和我们翻译中的错误. 这里我们对他们的帮助表示感谢. 但限于我们的水平, 这个译本一定还有不少问题, 请读者批评指正.

译　者

第二版序言

本书是按照现行数学学士和硕士学位关于一般拓扑学和函数空间的要求编写的.

全书是在巴黎讲授过几年的一份讲义的基础上形成的, 并且由 C.D.U. 出版社 (Centre de Documentation Universitaire) 出版过它的一些复印分册.

本书是为已经掌握了相当于大学第一阶段数学知识的大学生编写的. 尽管如此, 叙述中几乎不假定任何预备知识.

本书的目的在于使大学生在一个尽可能简单的框架中了解某些现代分析的强有力的工具及其应用.

书中的基本概念几乎都是在事先给出一、两个旨在说明定义选择的合理性的例子后, 再以一般的形式提出的. 因而我们考虑任意的拓扑空间是在对实直线作了简要的学习之后; 距离空间仅当提出一致性问题以后才引入. 同样, 赋范向量空间和 Hilbert 空间也只是在研究了局部凸空间的讨论后引入, 后者在现代分析及其应用中越来越重要.

我们注意了通过正面和反面的例子来明确一些定理的成立范围. 最后, 为使大学生能检验他们对课程是否很好理解以及训练他们的创造才能, 我们安排了难易不同的众多练习.

古斯塔夫・肖盖 (Gustave Choquet)

修订版序言

这一版仅仅是第一版的修订, 并未增加篇幅; 甚至还对无限乘积的研究做了显著的减少.

然而, 我也改正了一些错误, 并试图对一些含糊的证明作了澄清; 同时, 引入了一些旨在帮助理解推理结构的新概念, 并增加了一些练习.

如果这一版优于第一版, 这主要归功于我的大学及综合理工学院的学生们, 以及我的法国和外国的同事们, 特别是 Bass、Piron、Saint-Guilhem、Ursell 等先生. 为此, 我十分感谢他们.

古斯塔夫 · 肖盖 (Gustave Choquet)

C1 证书的拓扑学大纲[①]

摘自欧洲学生手册 (二级, 第 12 和 13 点)

A. 一般拓扑

$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑; Borel-Lebesgue 定理. 拓扑空间的一般定义 (通过开集或闭集); 距离空间的例子. 连续函数. 拓扑空间的积.

紧空间; 经典定理. 局部紧空间.

连通空间; 连同空间通过连续映射的像.

距离空间 (多个例子). 距离空间的紧性判别准则. 一致连续性; 紧距离空间到距离空间的连续映射情形.

完备距离空间 (不考虑完备化). 逐次逼近法.

完备赋范空间上的可和族; 按范数收敛.

B. 函数空间

距离空间上的映射空间的一致收敛距离; 紧距离空间上的映射空间情形; 连续映射情形.

---

①这里复述的本文摘自一份旨在协调欧洲数学教育的大纲; 引人注目的是它比相应的法国的正式大纲更详细, 但所包含的内容是一样的.

赋范向量空间; Banach 空间. 例. 数值函数向量空间上的一致收敛范数, 用积分定义的函数空间上的各种范数.

Stone-Weierstrass 定理, 或至少是 (多项式逼近的) Weierstrass 定理.

准 Hilbert 空间: 例. l^2 空间是完备的 (联系 Lebesgue 积分). 不等式. 到一个完备向量子空间上的射影, 以及更一般的, 到一个完备子集上的射影; 射影是一个压缩映射. 有可数基的准 Hilbert 空间; Schmidt 正交化. 应用: 特殊多项式序列, Fourier 级数.

目　　录

第一章 拓扑空间和距离空间

引 言

一般拓扑学形成一个有机联系的理论整体那还只是半个世纪以来的事情[①]; 但它可以追溯到古代, 是人们思想发展的必然结果.

当希腊数学家企图将数的概念精确化的时候, 极限与连续的概念就摆到了他们面前. 然而, 为了澄清收敛序列、收敛级数和连续函数的概念, 尚需等待 Cauchy (1821) 和 Abel (1823) 的著作的问世.

到了 Riemann (1851) 的时代, 框架更为扩大; 在 Riemann 的晋级论文《论作为几何学基础的假设》中, 他拟就了一个辉煌的大纲, 即研究 "多次扩大的度量的一般概念"; 这里不仅扩张到任意维的流形, 并且也包括函数空间和集合的空间.

但是如果不具备对实直线 (Dedekind) 和对数值函数 (Riemann, Weierstrass) 的良好知识, 尤其是缺乏一种既精确又一般的语言, 一个这样的大纲是不可能实现的. Cantor (1873) 创造了这种语言, 从而打开了通向新世界的大门.

一个英雄辈出、硕果累累的时代由此开始. 尽管有对新观念持异议的数学家的反对, 新发现却层出不穷, 特别是在法国 (Poincaré, Hadamard, Borel, Baire, Lebesgue) 和德国 (Klein, Mittag-Leffler). 人们由此迅速地对曲线的函数进行了研究, 并创立了实现 Riemann 大纲第一步的泛函分析 (Ascoli, Volterra, Hilbert).

[①]本书初稿在 1955 年成形, 第一版出版于 1964 年. 因此, 现在应该说"是一个世纪以来的事情".
—— 译者注

然而, 这再次显示了需要与这类研究相适应的某种语言和框架. 由 Fréchet 定义的距离空间为研究一致连续和一致收敛提供了一种基本工具. 它对于研究拓扑结构来说, 使用也很方便. Hausdorff 从众多的公理中提炼出一个简单的公理体系, 这一体系已成为目前的一般拓扑学的基石. Banach 在赋范向量空间的框架中创造了一些其重要性不断增长的工具, 从而奠定了泛函分析的基础.

我们对一般拓扑学的学习将从对实直线的初等学习开始; 一般拓扑学的现代研究并未减少这样做的重要性. 实直线上的定义和性质都将在一种可直接推广到任意拓扑空间的形式下陈述; 因此, 在这个框架下, 我们将可研究大部分拓扑性质.

一个拓扑空间可以是一条曲线、一张曲面, 也可以是一个曲线空间、一个函数空间. 因此, 我们将给出的陈述都概括了一大类特殊的陈述, 以致可应用于大量问题. 不过, 人们将只是逐步地发现在分析中和在几何中的形形色色的应用.

众多的例子将被用来说明定义和定理, 而某些陈述则只是到后面才指出它们的来由; 因此, 在学习一般拓扑学的时候, 要求读者先相信它, 这样才能比较容易地体会这一理论的内在的完美.

I. 直线 $\mathbb{R}$ 上的拓扑

§1. 开集、闭集、邻域、集合的界

我们不准备回顾实数集 $\mathbb{R}$ 的定义[①].

定义 1-1 *我们称 $\mathbb{R}$ 的子集 A 为***开集***, 是指它是空集或者对任何 $x \in A$, 存在包含 x 而又包含在 A 内的开区间.*

换句话说, $\mathbb{R}$ 中的开集是一些开区间的并.

由这一定义几乎立即可得如下结果:

O_1: 任意 (有限或无限) 个开集的并是开集;

O_2: 任意**有限**个开集的交是开集;

O_3: 直线 $\mathbb{R}$ 和空集 $\varnothing$ 是开集.

[①] 原文在这里还有 "在第三章已经给出的" 这一定语. 这是因为原书本来是《分析教程》的第五、六、七章.

实数集 $\mathbb{R}$ 的定义可从自然数集 $\mathbb{N}$ 出发来给出. 在 $\mathbb{N}$ 上引入加法运算, 为使加法有逆运算, $\mathbb{N}$ 就被扩充为整数集 $\mathbb{Z}$. 再在 $\mathbb{Z}$ 上引入乘法运算, 为使乘法有逆运算, $\mathbb{Z}$ 又扩充为有理数集 $\mathbb{Q}$. 最后, 再把 $\mathbb{Q}$ 扩充, 要求它满足**连续性公理**: 有上界的集合必定有上确界, 那么 $\mathbb{Q}$ 就被扩充为 $\mathbb{R}$.

至于自然数集 $\mathbb{N}$ 可用 Peano 公理定义: 1) $\mathbb{N} \neq \varnothing$; 2) 存在映射 $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (即 "$n \mapsto n+1$"), 且 $m \neq n \Rightarrow S(m) \neq S(n)$; 3) 存在 $1 \in \mathbb{N} \setminus S(\mathbb{N})$; 4) $\mathbb{N}$ 为满足 1), 2), 3) 的最小集. —— 译者注

性质 O_1 可由下列事实得出: 如果某集合族的每个集合都是开区间的并, 那么它们的并也是一些开区间的并.

为了证明性质 O_2, 只需就两个开集 A 和 B 的交的情形来讨论:

由假设,

$$A=\bigcup_i A_i, \qquad B=\bigcup_j B_j,$$

其中 A_i 和 B_j 都是开区间. 因而,

$$A\cap B=\left(\bigcup_i A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_j B_j\right)=\bigcup_{i,j}(A_i\cap B_j).$$

由于每个 $A_i\cap B_j$ 或是空集或是开区间, 故 $A\cap B$ 是开集.

最后, 性质 O_3 是明显的.

例 1° 任何开区间是开集. 2° 开区间 $(n,n+1)$ (其中 $n\in\mathbb{Z}$) 的并是开集.

相反, 闭区间 $[a,b]$ 不是开集.

Z 认为无限个开集的交总为开集是错误的. 例如, 开区间 $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$ 的交退化为单点集 $\{0\}$, 它不是开集.

定义 1-2 我们称 ℝ 的子集 A 是**闭集**, 是指它的补集 $\complement_{\mathbb{R}}A$ 是开集.

从性质 O_1, O_2, O_3 的每一个出发立即可得对闭集的对偶性质, 陈述如下, 而它们的证明是直接可得的:

F_1: 任意个闭集的交是闭集;

F_2: 任意有限个闭集的并是闭集;

F_3: 直线 ℝ 和空集 $\varnothing$ 是闭集.

例 任何闭区间 $[a,b]$ (其中 $a\leqslant b$) 是闭集. 事实上, $[a,b]$ 的补集是两个开区间 $(-\infty,a)$ 和 $(b,+\infty)$ 的并, 因而是开集.

Z 应该注意到, 一个集合可能非开非闭. 比如有理数集 ℚ.

定义 1-3 我们把任何含有包含 ℝ 的点 x 的开集的 ℝ 的子集称为点 x 的**邻域**.

换句话说, V 是 x 的邻域, 是指 V 含有包含 x 的开区间.

例如, 任何开集 A 是它的每个点的邻域. 反之, 如果集合 A 是它的每一点的邻域, 那么 A 是开区间的并, 从而是开集.

如果 x 和 y 是任意两个不同的点, 且 $x<y$, 那么存在 x 的邻域 V_x 和 y 的邻域 V_y, 使得 $V_x\cap V_y=\varnothing$; 事实上, 令 z 是 x 和 y 之间的任意点, 则只需取

$$V_x=(-\infty,z) \quad 和 \quad V_y=(z,+\infty).$$

Z 我们刚才给出的“邻域”一词的含义似乎有别于日常生活中的“邻近”的含义, 因为对于我们来说, $\mathbb{R}$ 的点有许许多多邻域, 而其中之一甚至就是 $\mathbb{R}$ 本身.

其实, 我们这样做不过是充实了一个至今还不太精确的概念, 因为今后我们已经可以说, 点 y 属于点 x 的某个指定的邻域 V, 而这个邻域 V 在某种意义下刻画了 x 和 y 的邻近程度.

集合的聚点 设 A 是 $\mathbb{R}$ 的子集, $\mathbb{R}$ 的点 x_0 称为 A 的**聚点**, 是指 x_0 的任何邻域中, 至少存在一个不同于 x_0 的 A 的点.

这样一来, 在 x_0 的任何邻域中存在无限多个不同于 x_0 的 A 的点. 否则, 就存在一个包含 x_0 的开区间 (a, b), 它只含有有限个 A 的点 (x_i). 这样也就存在一个与 A 至多只有公共点 x_0 的开区间 (a', b') (取 a' 为小于 x_0 的最大的 x_i, 如果这样的 x_i 不存在, 就取 a 作为 a'; 类似地取 b'); 而这由假设是不可能的.

Z 一个集合的聚点不一定属于这一集合. 比如点 0 是点 $x_n = 1/n$ (n 为大于 0 的整数) 的集合的聚点, 但并不属于这一集合. 同样, 点 0 和 1 是 $(0, 1)$ 的聚点, 但也不属于这一区间.

命题 1-4 *任何闭集包含其所有聚点. 反之, 任何包含其所有聚点的集合是闭集.*

设 A 为闭集; 如果 $x \in \complement A$, 那么开集 $\complement A$ 是 x 的邻域, 且不含 A 中的任何点. 因此, x 不可能是 A 的聚点.

反之, 如果 A 是使 $\complement A$ 中的任何点不是 A 的聚点的集合, 那么对任何 $x \in \complement A$, 存在不包含 A 的点的 x 的邻域, 从而此邻域在 $\complement A$ 中. 因此, $\complement A$ 是它的每个点的邻域, 即它是开集; 换句话说, A 是闭集.

孤立点 集合 A 的**孤立点**是指 A 中的不是 A 的聚点的点. 换句话说, 这种 A 的点 x 有邻域 V, 使得 $A \cap V = \{x\}$.

例 设 $A = [0, 1] \cup \mathbb{N}$; 则 A 的孤立点就是所有整数 $n \geqslant 2$.

上确界与下确界的存在性 我们已经[①]定义了所谓序集 E 的子集 A 的上确界[②]. 这种上确界并非总是存在的, 即使 A 是 E 的有上界的子集.

---

①原书这里还有“在第一章中”. ——译者注

②集合 E 称为**序集**是指 E 中定义了一个为其元素“排序”的二元关系 $\preccurlyeq$, 满足: 1) $\forall x \in E$, $x \preccurlyeq x$; 2) $\forall x, y \in E$, $(x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq x) \Longrightarrow (x = y)$; 3) $\forall x, y, z \in E$, $(x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq z) \Longrightarrow (x \preccurlyeq z)$.

E 的子集 A 的**上确界** $c \in E$ 是指 c 满足: 1) $\forall x \in A$, $x \preccurlyeq c$; 2) $\forall d \in E$, $(\forall x \in A, x \preccurlyeq d) \Longrightarrow (c \preccurlyeq d)$. 此外, 如果序集 E 还满足: 4) $\forall x, y \in E$, $x \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq x$ 至少有一个成立, 那么 E 称为**全序集**. 实数集 $\mathbb{R}$ 对于序关系 $\leqslant$ 为全序集. 复数集 $\mathbb{C}$ 对于如下定义的序关系 $\preccurlyeq$ 是序集, 但不是全序集: $(a + ib \preccurlyeq c + id) \Longleftrightarrow (a \leqslant c, b \leqslant d)$. ——译者注

例如, 设 E 为非负有理数所形成的全序集, A 为 E 中的满足 $x^2 < 2$ 的元素 x 的子集. 尽管 A 显然有上界, 但它在 E 中没有上确界.

相反, 所给出的 $\mathbb{R}$ 的定义[①]不会导致在 $\mathbb{R}$ 中出现这种情形. 由于这一性质极为重要, 我们在这里重述如下:

$\mathbb{R}$ 的基本性质 $\mathbb{R}$ 的任何有上界 (相应地, 有下界) 的非空子集有上确界 (相应地, 下确界).

设 A 为 $\mathbb{R}$ 的非空有上界子集, b 为它的上确界. 则半直线 $(-\infty, b]$ 包含 A, 且显然这是包含 A 的最小负向闭半直线.

对于任何 $x < b$, $[x, b]$ 与 A 相交. 因此, 或者 $b \in A$, 或者 b 是 A 的聚点.

特别地, 当 A 是闭集时, 它包含它的上确界 b; 于是 b 点是 A 的最大元素.

对于下确界显然也有类似性质.

注 当 A 无下界 (相应地, 无上界) 时, 我们有时称 $-\infty$ (相应地, $+\infty$) 为它的下确界 (相应地, 上确界). 我们将在稍后给出这一说法的确切含义.

有界集 我们称 $\mathbb{R}$ 的非空子集为**有界集**, 是指它既有上界又有下界, 换句话说, A 包含在一个闭区间 $[a, b]$ 中.

根据 $\mathbb{R}$ 的基本性质, A 有界的充要条件为它有上确界和下确界. 如果 a_0 和 b_0 是这两个界, 那么闭区间 $[a_0, b_0]$ 是包含 A 的最小闭区间.

如果 A 是有界闭集, 那么 a_0 和 b_0 属于 A, 且分别是 A 的最小元素和最大元素.

直径 对于任何 $A \subset \mathbb{R}$, 我们称 A 中两点间距离的上确界 $\delta(A)$ (有限或 $+\infty$) 为 A 的**直径**.

如果 $\delta(A)$ 有限, 那么对于任何 $x \in A$, 集合 A 有 $(x + \delta(A))$ 和 $(x - \delta(A))$ 分别为它的上界和下界, 从而 A 有界. 反之, 如果 A 有界, 且 a 和 b $(a \leqslant b)$ 分别为它的下确界和上确界, 那么 A 的直径有限且等于 $(b - a)$.

§2. 序列极限. Cauchy 收敛准则

设 (a_i) $(i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 是 $\mathbb{R}$ 的点的无限序列. 我们说, 这个序列收敛于 l, 或者说, l 是该序列的极限, 是指对于 l 的任何邻域 V, 除去有限个 i 值以外, 都有 $a_i \in V$ (显然我们可只取包含 l 的开区间来作为邻域 V).

这个极限 l 是唯一的. 否则, 令 l_1 和 l_2 是 $\mathbb{R}$ 的两个不同的点, V_1 和 V_2 是 l_1 和 l_2 的两个不相交的邻域. 如果除去有限个以外, 对于任何 i 都有 $a_i \in V_1$, 那么只可能对有限个 a_i, 有 $a_i \in V_2$; 因此, 如果 l_1 是该序列的极限, l_2 就不是.

---

①原书中这里的前面还有 "第三章中". $\mathbb{R}$ 的定义参见第一章第 1 节中的译者注. ——译者注

定理 2-1　任何有上界的递增 (相应地, 有下界的递减) 序列有极限.

事实上, 例如假设给定的序列 (a_i) 递增, 令 A 为点 a_i 的集合. 那么这个集合非空且有上界, 因而有上确界 l. 但包含 l 的开区间 V 至少包含一个点 a_{i_0}, 从而也包含所有指标 $i > i_0$ 的 a_i. 因此, l 是该序列的极限.

Cauchy 收敛准则　到目前为止, 我们只用到了 $\mathbb{R}$ 的序结构, 下面我们将首次用到它的群结构①.

所谓序列 (a_i) 收敛于 l, 也就是说, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在整数 n, 使得

$$(i \geqslant n) \Longrightarrow (|a_i - l| \leqslant \varepsilon).$$

由此可得

$$(i, j \geqslant n) \Longrightarrow (|a_i - a_j| \leqslant 2\varepsilon).$$

这个不等式的引人注目之处在于它与 l 无关. 我们即将看到, 反之, 任何具有这一性质的序列是收敛的. 确切地说, 我们有:

定义 2-2　我们说序列 (a_i) $(1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 为 Cauchy 列, 是指当 i 和 j 趋向于 $+\infty$ 时, $|a_i - a_j|$ 趋向于 0; 换句话说, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在整数 n, 使得

$$(i, j \geqslant n) \Longrightarrow (|a_i - a_j| \leqslant \varepsilon).$$

上述说法也等价于说: 令 A_n 为指标 $i \geqslant n$ 的点 a_i 的集合, 且设

$$\delta(A_n) = \sup_{x, y \in A_n} |x - y|.$$

那么递减序列 $\delta(A_n)$ 极限为 0.

定理 2-3 (Cauchy 准则) $\mathbb{R}$ 中的点的任何 Cauchy 列收敛.

证明　我们已经知道任何 $\mathbb{R}$ 中的点的收敛列是 Cauchy 列, 需要确立的是逆命题.

设 (a_i) 为 Cauchy 列. 利用上述记号, $\delta(A_n)$ 趋向于 0. 又设 α_n 和 β_n $(\alpha_n \leqslant \beta_n)$ 为 A_n 的下确界和上确界. 由于序列 (A_n) 是递减的 (在包含的意义下), 故 α_n 的序列递增, β_n 的序列递减.

递增序列 (α_n) 有 β_1 为上界, 因而有极限 α; 同样, (β_n) 有极限 β.

由于 α 和 β 属于所有区间 $[\alpha_n, \beta_n]$, 故有

$$|\beta - \alpha| \leqslant |\beta_n - \alpha_n|,$$

①这里是指 $\mathbb{R}$ 上有加法运算. 也就是说, $\mathbb{R}$ 关于加法是一个群. 关于群的定义我们将在第 7 节的注中提出.
—— 译者注

从而

$$\beta - \alpha = 0.$$

令

$$l = \alpha = \beta.$$

对于任何 n, 有

$$l \in [\alpha_n, \beta_n], \quad \text{且} \quad a_n \in A_n \subset [\alpha_n, \beta_n],$$

从而

$$|l - a_n| \leqslant \sup\{|l - \alpha_n|, |l - \beta_n|\}.$$

因此, 当 $n \to \infty$ 时, $(l - a_n) \to 0$, 即序列 (a_n) 收敛于 l. □

我们经常用 Cauchy 准则来证明一个序列收敛, 并且将把它推广到比实直线更一般的空间中去.

§3. 有界闭区间的紧性

有界闭区间的最重要的性质之一是通过 Heine-Borel-Lebesgue 定理来表述的. 这一定理使我们能把对有界闭区间的开覆盖的研究转化为对它的有限子覆盖的研究. 由这一定理立即可得另一条以 Bolzano-Weirstrass 定理著称的性质.

定义 3-1 直线上的集合 A 的所有由 $\mathbb{R}$ 的开集组成的覆盖称为 A 的**开覆盖**

定理 3-2 (Heine-Borel-Lebesgue 定理) 有界闭区间 $[a, b]$ 的任何开覆盖必有有限子覆盖.

更明确地说, 对于 $\mathbb{R}$ 的任何使

$$[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$$

的开集族 $(\omega_i)_{i \in I}$, 存在有限子集 $J \subset I$, 使得

$$[a, b] \subset \bigcup_{i \in J} \omega_i.$$

证明 设 $(\omega_i)_{i \in I}$ 为覆盖 $[a, b]$ 的开集族, 这里认为 $a < b$, 因为当 $a = b$ 时, 定理是显然的.

令 A 为 $[a, b]$ 中有下列性质的 x 的全体: 区间 $[a, x]$ 可被有限个开集 ω_i 所覆盖. 于是定理的证明转化为求证 $b \in A$. 而 A 是非空的, 因为它包含 a, 同时它又有上界 b. 这样它就具有属于 $[a, b]$ 的上确界 m.

对于 m 来说, 存在 $i_0 \in I$, 使得 $m \in \omega_{i_0}$; 而 ω_{i_0} 是 m 的邻域, 且在这一邻域中, 在 m 的左边存在 A 的点 x, 使得 $[x, m] \subset \omega_{i_0}$. 对于这样的 x, $[a, x]$ 具有有限个 ω_i

的覆盖, 从而 $[a, m] = [a, x] \cup [x, m]$ 也有这样的覆盖, 但是任何覆盖 $[a, m]$ 的有限个 ω_i 的子族也覆盖某一区间 $[a, m']$, 其中 $m' > m$. 这与 m 是 A 的上确界的事实仅当 $m = b$ 时才相容. □

Z 从现在起, 特别要注意定理 3-2 的陈述不能推广到无界区间和非闭有界区间的情形. 例如, 开集列 $\left(\frac{1}{n}, 2\right)$ (其中 $n \geqslant 2$) 覆盖了半开区间 $(0, 1]$, 但是这一开集列的任何有限子列都没有同样的性质.

定理 3-3 (Bolzano-Weierstrass 定理) 对于任何有界闭区间 $[a, b]$, $[a, b]$ 的任何无限子集 X 在 $[a, b]$ 中有聚点.

等价陈述 $[a, b]$ 的任何在 $[a, b]$ 上没有聚点的子集是有限集.

证明 如果 $[a, b]$ 中的任何点 x 都不是 X 的聚点, 那么任何 x 都具有开邻域 V_x, 其中至多包含 X 的一个点, 即 x 本身. 这些 V_x 构成 $[a, b]$ 的开覆盖; 由上述定理, 存在有限个 V_x, 例如 V_{x_i} $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 覆盖 $[a, b]$. 因此, X 至多包含 n 个点 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$. □

Z 这里再次要注意, 定理 3-3 的陈述既不能推广到有界非闭区间, 也不能推广到无界区间. 例如半开区间 $(0, 1]$ 中的点 $1/n$ 构成的无限序列在 $(0, 1]$ 中没有聚点. 事实上, 它在 $\mathbb{R}$ 上的聚点为点 0, 而 0 不属于 $(0, 1]$.

我们现在不准备对直线上的拓扑做更深入的研究. 事实上, 直线上的许多拓扑性质对于比直线远为一般的空间也是成立的. 因此, 把它们引进分析, 并非是人为的, 而是对于证明和发现许多性质来说必不可少的.

我们同样只打算给出与 Euclid[①]空间拓扑有关的若干定义, 然后着手研究一般拓扑空间. 在进行后一研究时, 思想上经常呈现较为具体的由实直线 $\mathbb{R}$、空间 $\mathbb{R}^n$ 以及它们的子集所构成的特殊情形, 将是十分有益的. 然后, 距离空间将是另一个相当直观的实体, 从中我们将吸取一些正、反例子.

§4. 空间 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑

我们知道, 空间 $\mathbb{R}^n$ 是 n 个恒同于 $\mathbb{R}$ 的空间的积, 因而, 它是 n 个实数的有序序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的集合. 但是在此之前, 我们仅在这个积集合中引入代数结构 (向量空间). 现在我们将在其上赋以一种拓扑结构.

定义 4-1 设 ω_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 $\mathbb{R}$ 中的开区间 (a_i, b_i) 或空集 $\varnothing$, 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们称 $\mathbb{R}^n$ 的子集 $\omega_1 \times \omega_2 \times \cdots \times \omega_n$ 为边是 ω_i 的**开方块** (当边之一是空集时, 它是

[①]Euclid 即《几何原本》的作者、古希腊数学家欧几里得 (Euclid of Alexandria, 约公元前 325 — 公元前 265). 在原书和法文文献中, Euclid 通常拼写为 Euclide. —— 译者注

空集). 如果它非空, 它的中心是坐标为 $x_i = (a_i + b_i)/2$ 的点.

边是 (ω_i) 和 (ω_i') 的两个开方块的交为边是 $(\omega_i \cap \omega_i')$ 的开方块.

通过用闭区间代替开区间 ω_i, 我们可类似地定义闭方块.

定义 4-2 我们称任何开方块的并为 $\mathbb{R}^n$ 的**开集**.

这样, 我们说 $\mathbb{R}^n$ 的子集 A 是开集, 等价的说法是: 对于任何 $x \in A$, 存在含有 x 而又包含于 A 中的开方块 (有必要时, 可以使这个方块以 x 为中心).

例 $\mathbb{R}^n$ 的任何开方块是 $\mathbb{R}^n$ 的开集. 相反, $\mathbb{R}^2$ 的直线不是 $\mathbb{R}^2$ 的开集.

可以验证, $\mathbb{R}^n$ 的开集满足第 1 节的性质 O_1, O_2, O_3 (在 O_3 中, 将 $\mathbb{R}$ 换为 $\mathbb{R}^n$). O_1, O_3 立即可得. 我们证明 O_2.

如果 A 和 A' 是两个开集, 那么有

$$A = \bigcup_{i \in I} p_i \quad 和 \quad A' = \bigcup_{j \in j} p_j',$$

其中 p_i 和 p_j' 是开方块.

于是

$$A \cap A' = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (p_i \cap p_j').$$

而 $p_i \cap p_j'$ 是开方块, 因此, $A \cap A'$ 是开集.

用递推法可将这一结果推广到任何有限个开集的交.

闭集、邻域、聚点等 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们说某集合是**闭集**, 是指它的补集是开集; 我们说集合 V 是点 x 的**邻域**, 是指它包含一个含 x 的开集; 我们说点 x 是集合 A 的**聚点**, 是指在 x 的任何邻域中, 至少存在一个不同于 x 的 A 的点.

我们可以在这里详尽研究这些定义的推论, 就像我们对 $\mathbb{R}$ 所做过的那样. 但是从现在起, 在一个更为一般的框架中来进行这些研究, 将是更有教益的. 尽管如此, 头脑里经常呈现较为具体的由直线 $\mathbb{R}$、空间 $\mathbb{R}^n$ 及其子集所构成的特殊情形, 将总是有好处的.

II. 拓 扑 空 间

在我们刚才所做的对 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的初步研究中, 几乎所有的概念都可以从开集出发来定义, 并且大部分性质也都可以只利用开集的性质 O_1, O_2, O_3 来得到. 由此就产生了在开集的概念上建立拓扑学的思想. 我们将试图用开集来表达诸如极限、连续等所有经典的拓扑概念, 并且从对这些开集的集合所作的一些简单的假设出发, 来重新得到尽可能多的经典定理.

§5. 开集、闭集、邻域

定义 5-1 设 E 为一集合, $\mathscr{O}$ 是由被称作**开集**的 E 的子集所组成的集合, 并且满足:

O_1: 任意 (有限或无限) 个开集的并是开集;

O_2: 任意有限个开集的交是开集;

O_3: 集合 E 和空集 $\varnothing$ 是开集.

那么我们称二元组 $(E, \mathscr{O})$ 为拓扑空间.

我们也说 E 的子集的集合 $\mathscr{O}$ 在 E 上定义了一个拓扑.

在任何集合 E 上, 我们都可定义多种拓扑, 除非 E 至多只包含一个点. 在这些拓扑中有一个是**离散拓扑**, 对于这种拓扑, $\mathscr{O}$ 是 E 的所有子集的集合. 这是 E 上包含尽可能多的开集的拓扑.

另一种拓扑是**粗拓扑**. 对于这种拓扑, $\mathscr{O}$ 只有两个元素: $\varnothing$ 和 E. 这是 E 上的包含尽可能少的开集的拓扑.

但是一般说来, 有意义的拓扑既不是离散拓扑, 也不是粗拓扑.

我们将注意到, 性质 O_1, O_2, O_3 就是我们在研究直线上的拓扑时曾经明确过的. 值得注意的是, 它们对于得到非常丰富的结果来说已经足够. 我们仅当研究分离拓扑空间和紧空间时, 再来对它进行补充.

例 全序集上的拓扑 设 E 是任意的全序集. 我们称 E 的开区间的任意并为 E 的**开集**. 换句话说, A 是 E 的开集, 是指 A 是空集或者对任何 $x \in A$, 存在含 x 而又包含在 A 内的开区间.

这一定义显然只是重复了在第 1 节的 $\mathbb{R}$ 的情形中用过的处理方法.

容易验证, 性质 O_1, O_2, O_3 都是满足的.

在 E 上这样定义的拓扑也称为序拓扑.

特殊情形 设 $\overline{\mathbb{R}}$ 为如下定义的全序集:

$\overline{\mathbb{R}}$ 由 $\mathbb{R}$ 的点再加上两个记号为 $-\infty$ 和 $+\infty$ 的补充点所组成. 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中, 我们说 $x \leqslant y$, 是指或者 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $(y - x)$ 非负, 或者 $x = -\infty$, 或者 $y = +\infty$.

容易验证, 这一关系就定义了 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的一个全序, 且 $-\infty$ 是它的最小元素, $+\infty$ 是它的最大元素.

赋有这个序并联系上述拓扑的 $\overline{\mathbb{R}}$ 称为**扩充直线**.

定义 5-2 我们称 E 的子集 A 为**闭集**, 是指它的补集 $\complement_E A$ 是开集.

正如与直线的情形一样, 由性质 O_1, O_2, O_3 通过对偶性立即可得与前者等价的、与 E 的闭集有关的三条性质 F_1, F_2, F_3:

F_1: 任意 (有限或无限) 个闭集的交是闭集;
F_2: 任意**有限**个闭集的并是闭集;
F_3: 空间 E 和空集 $\varnothing$ 是闭集.

例如, 对于 E 的离散拓扑, E 的所有子集都同时是开集和闭集; 对于 E 的粗拓扑, 仅有的闭集是 $\varnothing$ 和 E. 如果 E 是全序集, 任何 E 的闭区间对于序拓扑是 E 的闭集.

定义 5-3 (邻域) 我们称 E 的点 x 的**邻域**, 是指任何包含含 x 的开集的 E 的子集.

通常我们用 $\mathscr{V}(x)$ 表示 x 的邻域 V 的集合.

我们称 E 的子集 A 的邻域, 是指任何包含含 A 的开集的 E 的子集.

开集的特征 由上述定义可得, 开集是它的每一点的邻域. **反之**, 如果集合 A 是它的每一点的邻域, 那么它是开集. 事实上, 对于任何 $x \in A$, 存在含 x 的开集 ω_x, 且它包含于 A 中. 因此, 我们有

$$A = \bigcup_{x \in A} \omega_x.$$

这是个开集的并, 从而是开集.

结论 由此可见, 只要对所有 x 知道 x 的邻域, 空间的开集也就都已知. 换句话说, 在同一个集合上, 两种有同样邻域的拓扑是恒同的.

下面是邻域的某些基本性质, 有时它们被当作定义拓扑空间的出发点.

V_1: x 的任何邻域含 x, 且任何 x 至少有一个邻域;
V_2: 任何包含 x 的邻域的集合是 x 的邻域;
V_3: x 的两个邻域的交是 x 的邻域;
V_4: 如果 V 是 x 的邻域, 那么存在 x 的子邻域 W (即 $W \subset V$), 使得 V 是 W 的每一点的邻域.

头两条性质是直接的. 第三条性质由两个开集的交是开集可得.

第四条性质最为隐蔽; 它表达了下列模糊的观念: 与相当邻近于 x 的点相当邻近的所有点也在 x 的邻近. 由假设, 存在开集 ω, 使得 $x \in \omega$, 且 $\omega \in V$. 但 ω 是它的每一个点的邻域, 故 V 是 ω 的每一个点的邻域. 因此, 只需取 $W = \omega$.

点的邻域基 为了了解 $\mathscr{V}(x)$, 只需了解 $\mathscr{V}(x)$ 中足够多的元素.

定义 5-4 我们说 $\mathscr{V}(x)$ 的子集 $\mathscr{B}$ 构成 $\mathscr{V}(x)$ 的**基**, 是指任何 $V \in \mathscr{V}(x)$ 包含一个元素 $W \in \mathscr{B}$.

知道了 $\mathscr{B}$ 以后, $\mathscr{V}(x)$ 的元素 V 就可作为包含 $\mathscr{B}$ 的元素 W 的任意集合来得到.

例 1° 如果 E 是任意空间, 对于任何 $x \in E$, 含 x 的开集就构成 $\mathscr{V}(x)$ 的基.

2° 如果 E 是实直线 $\mathbb{R}$ (相应地, $\mathbb{R}^n$), 任何 E 的点 x 具有一个以 x 为中心、半长为 $1/n$ ($n > 0$ 为整数) 的开区间 (相应地, 开方块) 所构成的邻域基. 因此, 任何 E 的点 x 具有可数邻域基①.

定义 5-5 (拓扑空间的开集基) 我们把满足下列两个等价条件的 E 的开集类 (ω_i) 称为拓扑空间 E 的**开集基**:

1) 任何 $x \in E$ 有由 ω_i 的子族构成的邻域基;

2) 任何 E 的开集是 ω_i 的子族的并.

这两条性质的等价性直接由定义可得.

例 5-6 实直线 $\mathbb{R}$ 具有有理端点的开区间构成的可数开集基.

事实上, $\mathbb{R}$ 的每一点有一个由这样的区间构成的邻域基.

§6. 闭包、内部、边界

定义 6-1 (附着点、聚点、孤立点) 设 A 为 E 的子集, $x \in E$.

我们称 x 是 A 的**附着点**, 是指 x 的任何邻域包含 A 的点.

我们称 x 是 A 的**聚点**, 是指 x 的任何邻域包含 A 的不同于 x 的点.

我们称 x 是 A 的**孤立点**, 是指它属于 A, 但不是 A 的聚点, 换句话说, 存在 x 的一个邻域, 其中除 x 外不含 A 中的其他点.

这样, x 是 A 的附着点就等价于: 或者 x 是 A 的聚点, 或者 x 是 A 的孤立点.

我们称 E 中的 A 的附着点全体为 A 的**附着集**.

例如, 在 $\mathbb{R}$ 中, $\mathbb{Q}$ 的附着集就是 $\mathbb{R}$ 自己; 端点不同的区间 (a, b) 的附着集为 $[a, b]$; 点 $1/n$ ($n = 1, 2, \cdots$) 的集合的附着集是这个集合再加上点 0.

集合的闭包 对于任何 $A \subset E$ 存在一些包含 A 的闭集 (例如 E 本身). 根据性质 F_1, 它们的交仍然是包含 A 的闭集, 并且这是其中最小的一个. 由此有下列定义:

定义 6-2 我们把 E 中包含 A 的最小闭集称为 A 的**闭包**, 记为 $\overline{A}$.

命题 6-3 对于任何集合 A, A 的附着集和闭包恒同.

事实上, 如果 A 是空间 E 的子集, x 表示 E 的任意点, 那么性质:

$$(x \notin \overline{A}) \quad 和 \quad (x 不是 A 的附着点)$$

都能解释为存在 x 的开邻域 ω 不与 A 相交.

①与自然数可一一对应的集合称为可数集. 有理数集和代数数集都是可数集. 这里指邻域基是一个可数集.
——译者注

推论 1° 关系式 $A=\overline{A}$ 刻画了闭集的特征; 2° A 为闭集的充要条件为它含有它的所有聚点.

证明 1° 如果 A 是闭集, 那么它显然等于它的闭包. 反之, 由 $A=\overline{A}$ 可得 A 是闭集, 因为任何闭包由定义就是闭集.

这里可注意到, 对于任何 A 有 $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$.

2° 设 A' 是 A 的聚点集. 根据附着集的定义, 我们有 $\overline{A}=A\cup A'$. 因此, 说 $A=\overline{A}$ 等于说 $A=A\cup A'$ 或 $A'\subset A$. □

集合的内部 闭包的 "对偶" 概念[①]是内部的概念.

定义 6-4 我们把所有包含在 E 的子集 A 内的开集的并 (可能是空集) 称为 A 的**内部**. 因此, 这是包含在 A 内的最大开集; 记为 $\mathring{A}$.

直接可得, 关系式 $A=\mathring{A}$ 刻画了开集的特征.

拓扑运算 $\mathring{A}$, $\overline{A}$ 及初等运算的关系

1° 闭包和内部之间的对偶性:

1)

$$\complement\mathring{A}=\overline{\complement A}.$$

事实上, 由定义

$$\mathring{A}=\bigcup_{i\in I}\omega_i,$$

这里 $(\omega_i)_{i\in I}$ 表示所有包含在 A 内的开集的族. 因此,

$$\complement\mathring{A}=\bigcap_{i\in I}\complement\omega_i=\bigcap_{i\in I}\varphi_i,$$

其中 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 表示包含 $\complement A$ 的闭集族, 从而 $\complement\mathring{A}$ 是 $\complement A$ 的闭包.

2)

$$\complement\overline{A}=\mathring{\complement}A.$$

这个公式由在上述公式内用 $\complement A$ 代替 A 而推得.

① 原书这里还有 "在第一章的公式 12-2 的意义下". 这是指 De Morgan 公式:

$$\complement\left(\bigcup_i A_i\right)=\bigcap_i\complement A_i.$$

所谓 "对偶" 概念是指从子集类来看是 "相补" 概念. 例如开集类的对偶概念是闭集类.

—— 译者注

2° 闭包的性质:

$$1)\ \overline{\varnothing}=\varnothing; \qquad 2)\ A\subset\overline{A};$$
$$3)\ \overline{\overline{A}}=\overline{A}; \qquad 4)\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

前两个关系式是直接可得的; 第三个结果由任何闭集的闭包恒同于自己而得到.

为了证明第四个关系式, 首先注意到

$$(X\subset Y)\Rightarrow(X\subset\overline{Y})\Rightarrow(\overline{X}\subset\overline{Y});$$

由此导得 $\overline{A},\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$, 从而

$$\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}.$$

反之, $\overline{A}\cup\overline{B}$ 是包含 A 和 B 的闭集, 因而也是包含 $A\cup B$ 的闭集, 故

$$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}.$$

这一重要关系式显然可以推广到任何有限并的情形. 然而, 它不能推广到无限并的情形, 因为闭集的任意并并非总是闭集.

对于交不再有类似的关系式, 即使对有限交也如此. 例如, 设 E 为直线 $\mathbb{R}$, A 和 B 分别表示有理数集和无理数集, 则有 $\overline{A}\cap\overline{B}=\mathbb{R}$, 而 $\overline{A\cap B}=\varnothing$. 我们只能有包含关系 $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

同样, 对于 E 的任何子集族 (A_i), 我们有包含关系:

$$\cup\overline{A_i}\subset\overline{(\cup A_i)} \quad 和 \quad \overline{(\cap A_i)}\subset\cap\overline{A_i}.$$

3° 内部的性质 它们是闭包的性质的对偶:

$$1)\ \mathring{E}=E; \qquad 2)\ \mathring{A}\subset A;$$
$$3)\ \mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}; \qquad 4)\ (A\overset{\circ}{\cap}B)=\mathring{A}\cap\mathring{B}.$$

定义 6-5 (集合的边界) E 的子集 A 的边界 A^* 是所有这样的点的集合: x 的任何邻域 V 至少含 A 中的一点和 $\complement A$ 中的一点.

因而有

$$A^*=\overline{A}\cap\overline{\complement A}.$$

在这一公式上我们看到: 任何集合的边界是闭集, 两个互补的集合有相同的边界.

命题 6-6 对于 E 的任何子集 A, 有 $A^*=\overline{A}\setminus\mathring{A}$ [1].

---

[1] 原书中用 "$\dot{-}$" 来表示一个集合中去掉另一个集合的元素的差集运算 (setminus), 这一记号现在不太通用. 我们用现在常用的记号 "$\setminus$" 来取代它. —— 译者注

事实上, 我们有关系式:

$$A^* = \overline{A} \cap \overline{\complement A} \quad 和 \quad \overline{\complement A} = \complement \mathring{A}, \quad 故\ A^* = \overline{A} \cap \complement \mathring{A},$$

而这恰好就是所求的关系式.

推论 对于 E 的任何闭集 A, 有以下等价关系:

$$(A = A^*) \Leftrightarrow (\mathring{A} = \varnothing) \Leftrightarrow (\overline{\complement A} = E).$$

例 在 $\mathbb{R}$ 中, $\mathbb{Q}$ 的边界是 $\mathbb{R}$; 而 $\mathbb{R}$ 本身的边界倒是空集; $(0,1)$ 或 $[0,1]$ 的边界是集合 $\{0,1\}$.

处处稠密集、稠集和无处稠密集 在实直线上, 任何开集中有有理数.
相反, $\mathbb{R}$ 的任何非空开集包含不含任何整数的非空子开集. 为了使由 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的分布之间的区别所引起的模糊概念明确化, 我们引入以下定义:

定义 6-7 设 A 为空间 E 的子集.
我们说 A 在 E 中**处处稠密、稠**或**无处稠密**, 分别是指:
$\overline{A} = E$; $\overline{A}$ 有非空内部; $\overline{A}$ 的内部为空集.

例如, 在 $\mathbb{R}$ 中, 集合 $\mathbb{Q}$ 处处稠密; 集合 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ 稠; 集合 $\mathbb{Z}$ 无处稠密; 同样, 数 $1/n$ 的集合 (其中 $n = 1, 2, \cdots$) 也是无处稠密集.
注意, 有些数学家所用的术语 "稠" 是指这里的 "处处稠密".

直接的性质 (由命题 6-6 的推论可得)
1° 如果 A 在 E 上处处稠密, 且 $A \subset B \subset E$, 那么 B 也在 E 上处处稠密.
2° (A 处处稠密) $\Leftrightarrow$ (E 的任何非空开集与 A 相交).
3° (A 无处稠密) $\Leftrightarrow$ ($\overline{A}$ 无处稠密) $\Leftrightarrow$($\complement \overline{A}$ 处处稠密) $\Leftrightarrow$ (E 的任何非空开集包含与 A 不相交的非空子开集).
4° 如果 A 与 B 在 E 上无处稠密, 那么集 $A \cup B$ 也在 E 上无处稠密.

最后一条性质可推广到任意有限并情形, 但不能推广到无限并 (考虑 $\mathbb{R}$ 上的集合 $\mathbb{Q}$).

Z 如果 A 无处稠密, 那么 $\complement A$ 处处稠密. 但完全可能 A 和 $\complement A$ 都处处稠密; $\mathbb{R}$ 的子集 $\mathbb{Q}$ 及其补集就是这种情形.
同一个例子也说明, A 和 B 在其交 $A \cap B$ 为空集时, 仍然可以都是 E 的处处稠密集.

命题 6-8 任何有可数开集基的空间是可分的 (其意义为 E 包含可数处处稠密子集).

事实上, 设 (ω_n) 为给定的基, 且对于任何 n, 有 $\omega_n \neq \varnothing$; x_n 为 ω_n 的点. 则 x_n 的集合 X 在 E 上是处处稠密的, 因为如果 ω 是 E 的任意非空开集, 那么 ω 是某些非空 ω_n 的并, 从而含对应的 x_n; 换句话说, $(X \cap \omega)$ 不是空集.

§7. 连续函数. 同胚

为了能够谈论集合 X 到集合 Y 的映射的连续性, 需要在 X 和 Y 上定义邻近点的概念, 即 X 和 Y 必须是拓扑空间.

对单变量数值函数连续性的经典定义进行分析可导致下列定义:

定义 7-1 (点上的连续性) 我们称拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f 在 X 的点 x_0 上**连续**, 是指对于 $f(x_0)$ 的任何邻域 V, 存在 x_0 的邻域 v, 使得它通过 f 的像在 V 中, 即 $f(v) \subset V$.

这个定义可用逻辑记号写成:

$$(f \text{ 在 } x_0 \text{ 上连续}) \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} (\forall V, V \in \mathscr{V}(f(x_0)))(\exists v, v \in \mathscr{V}(x_0)) : (f(v) \subset V).$$

显然, 我们可要求 V 和 v 分别在 $f(x_0)$ 和 x_0 的给定的邻域基内, 而仍得到等价定义.

下面是 f 在 x_0 上连续的另一种方便的叙述方式: 对于 $f(x_0)$ 的任何邻域 V, $f^{-1}(V)$①是 x_0 的邻域. 事实上, 设 V 是 $f(x_0)$ 的邻域; 如果 v 是 x_0 的满足 $f(v) \subset V$ 的邻域, 那么有 $v \subset f^{-1}(V), f^{-1}(V)$ 包含 x_0 的一个邻域, 从而也是 x_0 的邻域; 反之, 如果 $f^{-1}(V)$ 是 x_0 的邻域, 置 $v = f^{-1}(V)$, 就有 $f(v) \subset V$. 这里我们仍然可要求 V 属于 $f(x_0)$ 的给定的邻域基.

例 1° 如果 f 是 X 到 Y 的常值映射, 那么对于 $f(x_0)$ 的任何邻域 V, 有 $f^{-1}(V) = X$; 因此, 任何 X 到 Y 的常值映射在 X 的所有点上连续.

2° X 到 X 的恒等映射 $x \to x$ 在 X 的所有点上连续.

定义 7-2 (整个空间上的连续性) 我们说 X 到 Y 的映射f **在 X 上或在 X 内连续**, 是指它在 X 的所有点上都连续.

定理 7-3 f 在 X 上的连续性等价于对于 Y 的所有开集 $B, f^{-1}(B)$ 是 X 的开集.

事实上, 假设 f 在 X 上连续; 如果 B 是 Y 中的开集, 由于 B 是它的每一点的邻域, 故 B 的逆像也是 B 的逆像的每一点的邻域, 因而也是开集.

---

①集合 $f^{-1}(V)$ 定义为: $\{x \in X : f(x) \in V\}$. 如果把 f^{-1} 理解为 Y 到 X 的映射, 那么它一般不是单值的, 而是多值的, 或者说是 “集值映射”. —— 译者注

反之, 假设 $f^{-1}(B)$ 对于任何 Y 中的开集 B 是开集; 那么对于任何 x_0 和 $f(x_0)$ 的邻域 V, $f^{-1}(\overset{\circ}{V})$ 是包含 x_0 的开集, 从而 $f^{-1}(V)$ 更是 x_0 的邻域. 因此 f 在 X 的所有点上连续.

定理 7-4 *f 在 X 上连续等价于对于 Y 的任何闭集 B, $f^{-1}(B)$ 是 X 的闭集.*

这一定理可通过应用关系式

$$f^{-1}(\complement B) = \complement f^{-1}(B)$$

而由上一定理导得.

推论 *如果 f 是 X 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射, 那么 X 中使 $f(x)=0$ 的集合 X 是闭集.*

对于形为 $f(x)\geqslant 0$, $f(x)\leqslant 0$, $f(x)>0$, $f(x)<0$ 的关系式的解, 我们将有类似的陈述.

特别地, 如果 f 是 n 个变量的实系数多项式, 那么这一推论指出, $f(x)=0$ 的解所形成的实代数流形是 $\mathbb{R}^n$ 的闭集; 对于 n 个复变量的多项式, 在 $\mathbb{C}^n$ 中有同样的结果.

Z 必须注意的是, 在定理 7-3 和 7-4 中陈述 f 的连续性的两条特征都是利用了 f **的逆像**, 而不是 f 的直接像.

事实上, X 的开集通过连续映射后的像仅在很特殊的情况下才是 Y 的开集. 例如, $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的常值映射 $x\to 0$ 把 X 的任何非空开集都不变成开集.

同样, X 的闭集通过连续映射后的像也可以不是 Y 的闭集. 例如, $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to 1/(x^2+1)$ 把闭集 $\mathbb{R}$ 变为 $\mathbb{R}$ 中的非闭集 $(0,1]$.

现在这里有一条用直接像来表达的 f 的连续性的特征:

定理 7-5 *X 到 Y 的映射 f 连续等价于对于任何集合 $A\subset X$, 有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.*

事实上, 如果 f 连续, 关系式 $A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ 导出 $\overline{A}\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, 从而 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

反之, 如果这一关系式对于任何 $A\subset X$ 成立, 我们指出集合 $A=f^{-1}(B)$ 对于 Y 的任何闭集 B 都是闭集, 从而也就证明了 f 连续:

我们有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}\subset\overline{B}=B$, 从而 $\overline{A}\subset f^{-1}(B)=A$. 因此, $\overline{A}=A$; 换句话说, A 是闭集.

连续映射的传递性 设 X,Y,Z 为三个拓扑空间, f 为 X 到 Y 的映射, g 为 Y 到 Z 的映射, $h=g\circ f$.

又设 $x_0\in X$; 置 $y_0=f(x_0)$, $z_0=g(y_0)=g(f(x_0))=h(x_0)$.

命题 7-6 *如果 f 在 x_0 上连续, g 在 y_0 上连续, 那么复合映射 $h=g\circ f$ 也在 x_0 上连续.*

事实上, 设 V 为 z_0 的任意邻域. 由 g 在 y_0 上连续可推得 $g^{-1}(V)$ 是 y_0 的邻域; 于是由 f 在 x_0 上连续又可推得 $f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) = h^{-1}(V)$ 是 x_0 的邻域.

特别地, 如果 f 在 X 上连续, g 在 Y 上连续, 那么 $h = g \circ f$ 也在 X 上连续.

例 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $u \to |u|$ 连续; 因此, 对于任何 X 到 $\mathbb{R}$ 上的连续映射 f, 由 $x \to |f(x)|$ 定义的 X 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $|f|$ 也连续.

同胚 如果存在 X 到 Y 的双射 f, 使得 X 和 Y 的开集互换, 即对于 X 的任何开集 A, $f(A)$ 为 Y 的开集, 而对于 Y 的任意开集 B, $f^{-1}(B)$ 为 X 的开集, 那么我们自然说, 这两个拓扑空间是同构的. 这种同构我们称为**同胚**.

很明显, 一个同胚的逆还是同胚, 而两个同胚的积也是同胚. 特别地, 一个空间到其自身的所有同胚形成一个群[①].

评论 同胚的概念是拓扑学中的基本概念, 因为同胚无非是说明拓扑结构间的同构关系; 在拓扑学中, 这是一种最基本的等价关系.

当两个拓扑空间同胚时, 所有对一个拓扑空间成立的性质对另一个也成立; 这样我们可以把它们看作同一类几何实体的两个代表.

当集合 E 具有包括拓扑结构在内的多种结构 (其他的可能是代数结构、距离结构等) 时, 我们说 E 的某个性质是拓扑性质, 是指这条性质对于所有与 E 拓扑同胚的空间都成立. 例如, $\mathbb{R}$ 包含可数的处处稠密子集就是一条拓扑性质. 只要我们有点习惯了, 一般容易辨别一条性质是否是拓扑性质. 在任何情形下, 只要是用开集以及由它导出的概念: 闭集、邻域、聚点、处处稠密等来陈述的性质, 总是拓扑性质.

下面我们不加证明, 也不作精确说明来给出一系列例子, 用以帮助理解同胚的直观内容. 图 1 中前面几行里我们都给出一个或几个图形以及与这些图形同胚的一些大写字母.

截头圆锥的表面与球冠同胚.

半球面与 $\mathbb{R}^2$ 的闭方块同胚.

当涉及空间 $\mathbb{R}^3$ 的曲面时, 把这些曲面想像为橡皮做的, 就能使我们对同胚有一个相当好的观念. 同胚这时就是这些曲面无撕裂、无重叠、无贴合的拉长压缩变形. 然而, 这种直观方法可能是不可靠的, 在任何情况下, 它都不能代替正确的推理.

同胚性证明的例子 设 X 和 Y 是两个同构的全序集, f 是 X 到 Y 的双射, 且它对于序结构是同构映射 (换句话说, f 是递增双射).

那么, f 对于 X 和 Y 上的联系它们的序的拓扑也是同胚.

事实上, f 交换 X 和 Y 的开区间, 从而也就交换它们中的开集, 因为开集是由开区间构成的.

[①]集合 G 称为群, 是指其上定义了代数运算 $\circ$: $\forall x, y \in G:\ x \circ y \in G$, 满足 i) $\forall x, y, z \in G$: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$; ii) $\exists e \in G, \forall x \in G$: $e \circ x = x \circ e = x$; iii) $\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G$: $x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$. 拓扑空间到自身的所有同胚对于复合运算形成群. —— 译者注

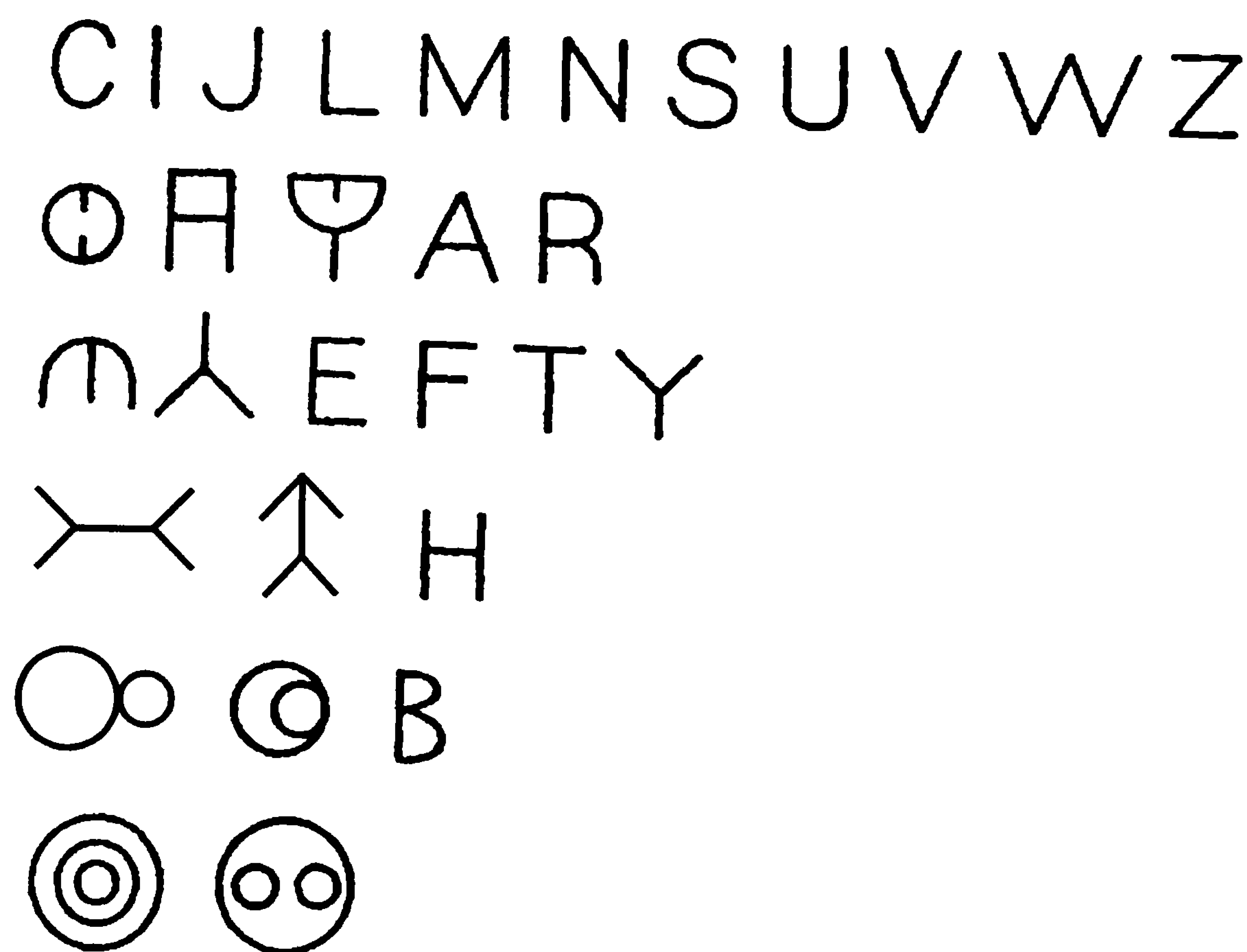


图 1

特殊情形 映射 $f\colon x \to x/(1+|x|)$ 是 $\mathbb{R}$ 到 $(-1,1)$ 上的双射; 置

$$f(-\infty) = -1, \quad f(+\infty) = 1,$$

则这一映射就被完备化为 $\overline{\mathbb{R}}$ 到 $[-1,1]$ 上的递增双射. 于是具有序拓扑的 $\overline{\mathbb{R}}$ 和 $[-1,1]$ 是同胚的.

现在我们证明一条判断同胚性的方便的一般准则:

定理 7-7 为使空间 X 到 Y 上的双射 f 是同胚, 必须且只需它是双方连续的, 即 f 和 f^{-1} 都连续.

事实上, f 和 f^{-1} 都连续等价于 Y 的任何开集的逆像是开集, 且 X 的任何开集的直接像也是开集. □

例 $\mathbb{R}^n$ 中的位移是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 上的同胚; 更一般的膨胀变换

$$x \to \lambda x + a \quad (\lambda \neq 0)$$

也是同胚.

Z 从某些特例的粗略研究中可能使人认为, 空间 X 到空间 Y 的任何连续双射 f 都是双方连续的. 我们稍后将会看到, 尽管在某些情形下确实如此 (参见紧空间部分), 但这并非是一个一般事实. 下面是几个例子:

例 1° Y 是实直线 $\mathbb{R}$; X 也是以 $\mathbb{R}$ 的元素为元素, 但赋有离散拓扑. X 到 Y 上的映射 f 是恒等映射 $x \to x$. 它显然是连续的, 但并非双方连续.

2°　X 和 Y 是 $\mathbb{R}$ 的两个子集, 其拓扑是由 $\mathbb{R}$ 的拓扑产生的诱导拓扑 (参见第 9 节); X 由区间 $[0,1)$ 和点 2 所构成; Y 是区间 $[0,1]$. 最后, f 定义为: 当 $x \in [0,1)$ 时, $f(x) = x$, 而 $f(2) = 1$.

直接可得这个映射是连续双射, 但 f^{-1} 在点 1 上不连续.

这些例子足以说明, 即使 f 是连续双射, 由 f 使点 "靠拢" 的事实可导致 f^{-1} 不连续; 更确切地说, 在 X 中可能存在这样的集合 A, 它不是点 a 的邻域, 而 $f(A)$ 却是 $f(a)$ 的邻域.

§8. 极限概念

序列的极限

定义 8-1　设 (a_i) $(i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 为空间 E 的点列. 我们说这个序列**收敛**于 E 的点 a, 或者说 a 是该序列的**极限**, 是指对于点 a 的任何邻域 V, 存在整数 i_0, 使得对于任何 $i \geqslant i_0$, 有 $a_i \in V$.

简记为

$$(\forall V, V \in \mathscr{V}(a))\,(\exists i_0, i_0 \in \mathbb{N})(\forall i, i \geqslant i_0)\colon (a_i \in V).$$

这一条件也可表述为: 对于点 a 的任何邻域 V, 除了至多有限个 i 值以外, 有 $a_i \in V$.

直接可得, 当序列 (a_i) 收敛于 a 时, 它的任何无限子列也收敛于 a.

如果空间 E 是任意的, 一个序列可能具有多个极限点; 例如, 当 E 的拓扑是粗拓扑时, E 的所有点都是任何点列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的极限.

但当 E 是下列意义下的**分离**空间时, 我们可以肯定极限是唯一的:

定义 8-2　我们说空间 E 是**分离的**, 是指 E 的任意两个不同的点都具有两个不相交的邻域.

最常用的空间总是分离的; 例如直线 $\mathbb{R}$ 就是分离空间 (参见第 1 节).

在分离空间中, 点 a 的闭邻域的交必退化为一个点. 事实上, 对于任何 $b \neq a$, 存在两个分别包含 a 和 b 的不相交的开集 ω_a, ω_b, 从而 $\complement\omega_b$ 是 a 的不包含 b 的闭邻域.

特别地, 任何集合 $\{a\}$ 是闭集, 因为它是它的所有闭邻域的交.

命题 8-3　分离空间的任何点列至多只有一个极限点.

证明完全是对 $\mathbb{R}$ 情形给出的证明的重复.

序列的附着值　实数列 $a_n = (-1)^n$ 不收敛, 尽管如此, 数 1 和 -1 似乎可看作广义极限. 对这个观念的分析导致下列定义:

定义 8-4　设 (a_i) $(i = 1, 2, \cdots)$ 是空间 E 的点列. 我们说 E 的点 a 是这个点列的**附着值**, 是指对于 a 的任何邻域 V, 存在一些任意大的指标 i, 使得 $a_i \in V$.

如果我们以 A_n 表示指标 $i \geqslant n$ 的点 a_i 的集合, 我们还可以说, a 是附着值, 是指对于任何 n, 点 a 属于 A_n 的附着集.

序列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 的附着值集因而就是

$$A = \bigcap_1^{\infty} \overline{A}_n.$$

这个集合是闭集, 但可能是空集; 例如在 $\mathbb{R}$ 中, 序列 $(a_n = n)$ 没有任何附着值.

如果序列的所有点 a_i 都属于 E 的闭子集 F, 我们也有 $A \subset F$; 事实上, $A_n \subset F$, 从而 $\overline{A}_n \subset F$, 以致 $A \subset F$.

在分离空间中, 如果序列 (a_i) 收敛于 a, 这个点就是序列唯一的附着值. 事实上, 设 $b \neq a$, V_a, V_b 为这两个点的不相交的邻域. 于是存在 n, 使得 $A_n \subset V_a$, 由于 $A_n \cap V_b = \varnothing$, 点 b 不是序列的附着值.

Z 相反, 即使在分离空间中, 一般说来, 断言 "有唯一的附着值的序列就收敛于这个值" 是不对的. 例如在 $\mathbb{R}$ 中, 序列 $(1/2, 2, 1/3, 3, \cdots, 1/n, n, \cdots)$ 以点 0 为唯一的附着值, 但它并不收敛于 0.

注 为了对序列 (a_n) 的附着值集有更确切的观念, 我们可以验证, 它是两个集合的并: 一部分是点 a_n 的集合 X 的聚点集, 另一部分是序列的**重复点**集, 即有无限个指标 n 满足 $x = a_n$ 的点 x 的集合.

关于滤子基的极限与附着值 经典分析并非只是对序列定义极限概念: 例如, 函数 $x^2/(x^2+1)$ 当 x 趋向于 ∞ 时趋向于 1; $(1/x^2 + 1/y^2)$ 当 x 和 y 趋向于 ∞ 时趋向于 0; $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 x 由不等于 0 的值趋向于 0 时趋向于 1.

我们即将看到, 在上述例子中涉及的所有极限概念都是一种一般概念的特殊情形.

定义 8-5 设 E 是一任意集合. 我们说 E 的子集的集合 $\mathscr{B}$ 为 E 上的滤子基, 是指:

1° 对于任何 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, 存在 $B_3 \in \mathscr{B}$, 使得 $B_3 \subset B_1 \cap B_2$;

2° 所有 $\mathscr{B}$ 的元素 B 都非空.

由这一定义可得 $\mathscr{B}$ 的有限个元素的交总是非空的.

例 1° $E = \mathbb{N}$, $\mathscr{B}$ 的元素是 E 的形为 $\{n, n+1, \cdots\}$ 的子集.

2° $E = \mathbb{N}^2$, $\mathscr{B}$ 的元素是 E 的子集 B_n, 其中 B_n 为使 $p \geqslant n, q \geqslant n$ 的数对 (p, q) 的集合.

3° $E = \mathbb{R}$, $\mathscr{B}$ 的元素是 $\mathbb{R}$ 的区间 $[a, +\infty)$.

4° E 是一个拓扑空间, $\mathscr{B}$ 是 E 的点 a 的邻域基.

5° E 是一个拓扑空间, A 表示 E 的非空子集, a 表示 A 的附着点.

$\mathscr{B}$ 的元素是形为 $A \cap V$ 的集合, 其中 V 是 a 的任意邻域 (我们甚至可要求 V 属于 a 的邻域基).

定义 8-6 设 f 为集合 X 到拓扑空间 Y 的映射, $\mathscr{B}$ 是 X 上的滤子基, b 是 Y 的点.

我们说 f 沿 $\mathscr{B}$ 收敛于 b (或有极限 b), 是指对于 b 的任何邻域 V, 存在 $B \in \mathscr{B}$, 使得 $f(B) \subset V$.

这时记作 $\lim\limits_{\mathscr{B}} f = b$.

特别地, 当 $X = Y$ 且 f 是 X 到 X 的恒等映射时, 我们说滤子基 $\mathscr{B}$ 收敛于 b.

例 1° 设 (a_n) 为 Y 的点列; 我们以 f 表示 $\mathbb{N}$ 到 Y 的映射 $n \to a_n$, 以 $\mathscr{B}$ 表示补集为有限集的 $\mathbb{N}$ 的子集全体. 于是定义 8-6 重合于定义 8-1.

2° 如果 X 是拓扑空间, $\mathscr{B}$ 表示 X 的点 a 的邻域全体, 那么 $f(a)$ 是 f 沿 $\mathscr{B}$ 的极限等价于 f 在点 a 上连续.

注意, 有时我们用记号 $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x)$ 来代替 $\lim\limits_{\mathscr{B}} f$, 特别当 $f(x)$ 有简单表达式以及 f 没有一种经典记号时更是如此; 例如对于初等函数 $x \to x^n$ 和 $x \to |x|$ 就这样做.

命题 8-7 如果 Y 是分离空间, 那么 f 沿 $\mathscr{B}$ 至多只有一个极限.

事实上, 假设 b 和 b' 是 f 沿 $\mathscr{B}$ 的极限. 对于 b, b' 的任何邻域 V, V', 存在 $B, B' \in \mathscr{B}$, 使得

$$f(B) \subset V, \quad f(B') \subset V'.$$

由于 $B \cap B'$ 非空, 从而 $f(B) \cap f(B')$ 也非空, $V \cap V'$ 当然更是非空. 因为 Y 是分离空间, 这仅当 $b = b'$ 时才有可能.

定义 8-8 设 f 为 X 到拓扑空间 Y 的映射, $\mathscr{B}$ 是 X 上的滤子基.

我们说 Y 的点 b 是 f 沿 $\mathscr{B}$ 的附着值, 是指对于任何 $B \in \mathscr{B}$ 和 b 的任何邻域 V, $f(B)$ 与 V 相交.

这等价于说, 对于任何 $B \in \mathscr{B}$, 有 $b \in \overline{f(B)}$, 或者

$$b \in \bigcap_{B \in \mathscr{B}} \overline{f(B)}.$$

因而这种 b 的集合 (称为 f 沿 $\mathscr{B}$ 的**附着集**) 就是集合

$$\bigcap_{B \in \mathscr{B}} \overline{f(B)};$$

它显然是闭的, 我们将它记为 $\bar{f}(\mathscr{B})$.

正如序列的情形那样, 可以验证, 如果 Y 是分离空间, f 沿 $\mathscr{B}$ 收敛于 b, 那么 b 是 f 沿 $\mathscr{B}$ 的唯一的附着值.

特殊情形 8-9 (函数在一点上的极限和附着值) 我们现在假设 X 是拓扑空间; A 是 X 的非空子集, $a \in \overline{A}$; 同时又以 $\mathscr{B}$ 表示 X 的形为 $A \cap V$ 的子集的集合, 其中 V 是 a 的任意邻域.

于是我们说当 x 在 A 上趋向于 a 时 f 有极限 b, 是指

$$b = \lim_{\mathscr{B}} f$$

成立.

例 如果 $X = \mathbb{R}$, $A = (a, +\infty)$, 我们以 $f(a_+)$ 表示 f 沿 $\mathscr{B}$ 可能有的极限 (即**右极限**). 同样也可定义左极限 $f(a_-)$.

当 $a \in A$ 且 $\lim\limits_{\mathscr{B}} f$ 存在时, 如果 Y 是分离的, 这个极限只能是 $f(a)$

用同样方式我们也可定义当 x 在 A 上趋向于 a 时 f 的附着值.

§9. 拓扑空间的子空间

设 E 为拓扑空间, A 为 E 的子集.

在 A 上所有可以定义的拓扑中, 我们研究使 A 到 E 的恒等映射 f 连续的拓扑. E 的开集对这一映射的逆像无非就是该开集与 A 的交. 因此, 为使典则映射 f 连续, 必须且只需 A 的拓扑的开集全体包含所有这些交.

然而, 直接可知 E 的开集在 A 上的迹 (即开集与 A 的交) 满足公理 O_1, O_2, O_3. 这就是我们下面要考虑的用这些迹来定义的 A 上的拓扑.

定义 9-1 对于拓扑空间 E 的任何子集 A, 如果 A 被赋以用 E 的开集在 A 上的迹来定义开集的拓扑, 那么称 A 为 E 的**子空间**.

我们也说 A 的拓扑是由 E 的拓扑所诱导的, 或者说是 E 的拓扑的迹.

于是 A 到 E 的恒等映射是连续的.

子空间上的闭集和邻域 设 ω 为 E 的开集. 公式

$$A \setminus (A \cap \omega) = A \cap \complement \omega$$

指出子空间 A 的闭集无非就是 E 的闭集在 A 上的迹.

同样, 在子空间 A 上, A 的点 a 的邻域也就是集合 $A \cap V$, 其中 V 是 a 在 E 中的邻域.

Z 必须非常小心, E 的子空间 A 的开集 (相应地, 闭集) 不一定是 E 的开集 (相应地, 闭集). 这一注记由下列命题精确化:

命题 9-2 为使 E 的子空间 A 的任何开集 (相应地, 闭集) 是 E 的开集 (相应地, 闭集), 必须且只需 A 是 E 上的开集 (相应地, 闭集).

事实上, 如果 A 是 E 上的开集, 那么 E 的任何开集在 A 上的迹也是 E 上的开集. 反之, 如果 E 的任何开集在 A 上的迹是 E 上的开集, 那么 E 在 A 上的迹也是开集, 即 A 本身是开集.

把 "开集" 这一词换为 "闭集", 我们就有平行的推理.

命题 9-3 (子空间的传递性) *设 X 为拓扑空间, Y 为 X 的子空间, Z 为 Y 的子集. 那么由 X 的拓扑和由 Y 的拓扑在 Z 上诱导的拓扑是一样的.*

事实上, 子空间 Y 的开集是形为 $Y \cap \omega$ 的集合, 其中 ω 是 X 的开集. 因此, 对于由 Y 的拓扑诱导的拓扑, Z 的开集是形为 $Z \cap (Y \cap \omega)$ 的集合; 而这样的集合无非就是 $Z \cap \omega$; 所以对于 X 的拓扑和 Y 的拓扑在 Z 上诱导的拓扑, 开集是一样的.

命题 9-4 *设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Z 的子空间 Y 的映射.*
f 在 X 的点 a 上连续, 等价于把 f 看作 X 到 Z 的映射时, f 在 a 上连续.

事实上, $f(a)$ 在 Y 上的邻域是集合 $V \cap Y$, 其中 V 是 $f(a)$ 在 Z 上的邻域, 而由于 $f(X) \subset Y$, 我们有

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap Y).$$

命题 9-5 *设 f 为空间 X 到空间 Y 的映射. 如果 f 在点 a 上连续, 那么 f 在含 a 的任何子空间 A 上的限制也在点 a 上连续.*

事实上, 令 g 为 f 在 A 上的限制; 对于任何 $f(a)$ 在 Y 上的邻域 V, 有

$$g^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V).$$

因此, 当 $f^{-1}(V)$ 是 a 在 X 上的邻域时, $g^{-1}(V)$ 是 a 在 A 上的邻域.

Z 相反, g 在 a 上连续, 而 f 在 a 上不连续的情况是可能的. 例如, f 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 它在 $\mathbb{Q}$ 上为 0, 在 $\complement\mathbb{Q}$ 上为 1. 则 f 在 $\mathbb{R}$ 的所有点上不连续, 然而 f 在 $\mathbb{Q}$ 上的限制是连续的 (f 在 $\complement\mathbb{Q}$ 上的限制也是连续的).

尽管如此, 在一种重要情形下, g 在 a 上的连续性等价于 f 的连续性; 这就是 A 为 a 的邻域时的情形. 事实上, 这时如果 $A \cap f^{-1}(V)$ 是 a 在 A 上的邻域, 那么它同样也是 a 在 X 上的邻域, 因而 $f^{-1}(V)$ 更是 a 在 X 上的邻域.

我们把这种等价性说成是映射在一点上的连续性是**局部**性质.

命题 9-6 *分离空间的任何子空间是分离的.*

事实上, 设 A 是分离空间 X 的子空间. 对于任何 $x, y \in A$, $x \neq y$, 在 X 上存在这两个点的不相交的邻域 V_x, V_y; 集合 $A \cap V_x$, $A \cap V_y$ 构成 x, y 在子空间 A 上的两个邻域, 且它们也不相交.

应用 子空间的概念是一种定义和研究新拓扑空间的方便手段. 这样, 任何 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^n$ 的子集被赋以诱导拓扑后就成为拓扑空间.

例如, 在 $\mathbb{R}^n$ 上由 $\sum x_i^2 = 1$ 定义的**球面** S_{n-1} 就构成一个非常有意义的子空间.

任何与 S_{n-1} 同胚的空间称为 $(n-1)$ 维**拓扑球**; 特别地, 同胚于 S_1 的任何空间称为**简单闭曲线**.

同样, 我们称任何与 $(0,1)$ (相应地, $[0,1]$) 同胚的空间为**简单开** (相应地, **闭**) **弧**.

Z 在 $\mathbb{R}$ 中任何开区间 (a,b) $(a<b)$ 是同胚的, 因为我们可以用形为 $x \to \alpha x+\beta$ 的膨胀把一个区间变为另一个区间; 它们中的每一个也都与 $\mathbb{R}$ 同胚, 例如 $\mathbb{R}$ 到 $(0,1)$ 上的双射 $x \to x/(1+|x|)$ 就是一个同胚.

同样还有, 对于每个这样的区间 (a,b), 由 $\mathbb{R}$ 的拓扑诱导的拓扑恒同于 (a,b) 上的序拓扑. 但是不应该认为这种恒同能推广到 $\mathbb{R}$ 的任何子集; 例如, 在 $A = ([0,1)) \cup \{2\}$, 上, 这两种拓扑就是不同的. 通过下列陈述, 我们将刻画一类两种拓扑恒同的集合:

命题 9-7 设 X 是全序集; 对于 X 的任何广义区间 A, A 上的序拓扑恒同于 X 的序拓扑在 A 上的迹.

事实上, 任何序集 A 的开区间形为 (a,b), $(-\infty,a)$, $(a,+\infty)$ 或者 A, 其中 a,b 表示 A 的点. 既然这样的集合是 A 与 X 的开区间的交, 因而这种集合的并无非就是 A 与 X 的某个开集的交, 由此得到两种拓扑恒同.

例如, 在 $\mathbb{R}$ 上, $[0,1]$ 或者 $(0,1)$ 上的序拓扑恒同于由 $\mathbb{R}$ 的拓扑诱导的拓扑.

§10. 空间的有限积

我们已经在前面利用 $\mathbb{R}$ 的开区间的积, 定义了由 $\mathbb{R}$ 的拓扑导得的 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑. 这种做法可以推广到空间的任意积的情形. 这里我们只研究空间的有限积.

设 E_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是拓扑空间的有限族. $E=\prod E_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的集合, 其中 $x_i \in E_i$. 在 E 上所有可能的拓扑中, 我们将只考虑使每个 E 到 E_i 的投影 $x \to x_i = f_i(x)$ 都连续的拓扑; 这一条件等于说对于每个开集 $\omega_i \subset E_i$, 集合 $f_i^{-1}(\omega_i)$, 即积

$$E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times \omega_i \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n,$$

应该是 E 上的开集. 因此, 所有这种集合的有限交, 即形为 $\prod \omega_i (i=1,2,\cdots,n)$ 的集合以及所有这种形式的集合的并, 也都应该是 E 上的开集. 如果我们能够验证后面所说的这些集合满足公理 O_1, O_2, O_3, 那么自然可取它们所定义的拓扑为 E 上的拓扑.

这样就导致下列定义.

定义 10-1 我们称所有形为 $p=\prod \omega_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的 E 的集合为 $E=\prod E_i (i=1,2,\cdots,n)$ 的**基本开集**, 其中 ω_i 为 E_i 的任意开集.

我们称任何基本开集的并为 E 的开集.

这些开集的族显然满足公理 O_1 和 O_3. 它也满足 O_2, 因为如果

$$A=\bigcup_{j\in J}p_j,\quad A'=\bigcup_{k\in K}p'_k,$$

那么我们有

$$A\cap A'=\bigcup_{(j,k)\in J\times K}(p_j\cap p'_k),$$

且每个 $(p_j\cap p'_k)$ 也是基本开集.

因此, 这些开集定义了 E 上的拓扑. 由构造, 这一拓扑使得对于每个 i, E 到 E_i 上的投影是连续映射. 我们称被赋以这个拓扑的 E 为空间 E_i 的**拓扑积**.

例　1° 在 § 4 中我们已定义 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑; 那里我们已经取开方块的并为开集; 但是由于 $\mathbb{R}$ 的任何开集是开区间的并, 用这些开方块定义的 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑恒同于积拓扑.

2° 拓扑积 $S_1\times\mathbb{R}$ 称为圆柱的拓扑空间.

3° 拓扑积 $(S_1)^n$ 称为 n 维**圆环**.

Z 对于 E_i 的拓扑积 E 的任何开集 Ω, Ω 在每个 E_i 上的投影是开集, 因为这是其并为 Ω 的基本开集 $p=\prod\omega_i$ 的投影 ω_i 的并.

相反, 认为 E 的闭集 A 的投影总是闭集则是错误的. 积空间 $\mathbb{R}^2$ 的闭集 $A=\{(x,y):xy=1\}$ 就是一个例子.

子空间的积　如果 A_i 表示 E_i 的子空间, 我们将验证, 在 $A=\prod A_i$ 上的积拓扑恒同于 $\prod E_i$ 的拓扑在其子集 A 上所诱导的拓扑.

特别地, 对于任何 $a_i\in E_i$ $(i=2,3,\cdots,n)$, 空间 E_1 在映射 $x_1\to(x_1,a_2,\cdots,a_n)$ 下同胚于 E 的子空间 $E_1\times\{a_1\}\times\cdots\times\{a_n\}$.

拓扑积的结合律　如果 A,B,C 是三个拓扑空间, 那么在空间 $(A\times B)\times C$ (相应地, $A\times(B\times C)$) 和 $A\times B\times C$ 之间的一一典则对应是同胚.

为此只需 (参见 § 5) 指出, 这一对应保持邻域不变. 而任何 $(A\times B)\times C$ 的点 (a,b,c) 具有由集合

$$(\omega_a\times\omega_b)\times\omega_c$$

所组成的邻域基; 任何 $(A\times B\times C)$ 的点 (a,b,c) 具有由集合 $\omega_a\times\omega_b\times\omega_c$ 所组成的邻域基, 这里 $\omega_a,\omega_b,\omega_c$ 表示 a,b,c 在 A,B,C 上的开邻域. 由于集合 $(\omega_a\times\omega_b)\times\omega_c$ 与 $\omega_a\times\omega_b\times\omega_c$ 在一一典则映射下是互为对应者, 从而得到所求性质.

这一结合律使我们可以简化某些证明, 即这些证明只需对两个空间的积来进行.

交换律 我们容易验证, 拓扑积在例如下列意义下是可交换的: $A\times B$ 到 $B\times A$ 上的典则双射 $(x,y)\to(y,x)$ 是同胚.

积空间上的连续映射 我们通常用 E 到每个 F_i 的坐标映射 $x\to f_i(x)$ 来表示空间 E 到积空间 $F=\prod F_i$ 的映射 $x\to f(x)$. 由下列命题得到 f 的连续性和 f_i 的连续性之间的紧密联系:

命题 10-2 为使 E 到有限乘积 $F=\prod F_i$ 的映射 f 在 a 上连续, 必须且只需每个 E 到 F_i 的坐标映射 f_i 在 a 上连续.

事实上, 如果 f 在 a 上连续, 由于 $f_i=\mathrm{pr}_i\circ f$, 这里 $\mathrm{pr_i}$ 表示 F 到 F_i 上的投影运算, 故映射 f_i 在 a 上连续. 反之, 假设每个 f_i 在 a 上连续; 对于任何包含 $f(a)$ 的 F 的基本开集 $\omega=\prod\omega_i$, $f_i^{-1}(\omega_i)$ 是 a 在 E 上的邻域, 因此, $f^{-1}(\omega)$, 即

$$\bigcap_i f_i^{-1}(\omega_i)$$

也是 a 的邻域. 由于 $f(a)$ 在 F 上的任何邻域 V 包含着含 $f(a)$ 的基本开集 ω, 包含 $f^{-1}(\omega)$ 的 $f^{-1}(V)$ 更是 a 的邻域.

例 设 u_1,u_2 分别是 E 到 F_1,F_2 的两个连续映射, $g\colon(y_1,y_2)\to g(y_1,y_2)$ 是 $F_1\times F_2$ 到空间 G 的连续映射.

于是 E 到 G 的映射 $X\to g(u_1(x),u_2(x))$ 连续.

积空间到另一空间的映射 设

$$f\colon(x,y)\to f(x,y)$$

为积空间 $X\times Y$ 到空间 F 的映射.

如果 f 连续, 那么它在 $X\times Y$ 的任何子空间上的限制也连续; 特别地, 对于任何 $a\in X$, f 在 $(a\times Y)$ 上的限制连续. 换句话说, 因为 Y 到 $(a\times Y)$ 上的映射 $y\to(a,y)$ 是同胚, 故 Y 到 F 的映射 $y\to f(a,y)$ 连续.

这也就是说, f 的连续性导致偏映射 $x\to f(x,b)$ 和 $y\to f(a,y)$ 的连续性.

Z 但是**反之不然**; 事实上, 设 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 f 定义为

$$f(0,0)=0;\quad f(x,y)=xy/(x^2+y^2),\ \text{当}\ (x,y)\neq(0,0).$$

直接可得两个偏映射都是连续的; 但 f 在 0 上不连续, 因为例如对于任何 $x\neq 0$,

$$f(x,x)=1/2,$$

但是

$$f(0,0)=0.$$

我们还能构造类似的例子使得 f 的间断点的集合在 $\mathbb{R}^2$ 上处处稠密.

积空间上的极限 用与命题 10-2 的证明一样的方式我们可证明下列陈述:

命题 10-3 为使 $F=\prod F_i$ 的点列 (a_n) 收敛于 F 的点 $l=(l_i)$, 必须且只需对于任何 i, 序列 $(a_n)_i$ 收敛于 l_i.

更一般地, 设 $\mathscr{B}$ 是集合 E 上的滤子基, $f=(f_i)$ 是 E 到积拓扑空间 $F=\prod F_i$ 的映射, $l=(l_i)$ 为 F 的点.

可以验证,

$$(l=\lim_{\mathscr{B}} f) \iff (\text{对于任何 } i,\, l_i=\lim_{\mathscr{B}} f_i).$$

命题 10-4 (分离空间的积) 如果空间 E_i 是分离空间, 那么它们的积 E 也是分离空间.

显然只需对于两个空间 E_1, E_2 的积进行证明.

因为当 a 和 b 是 E 的两个坐标分别为 (a_1,a_2) 和 (b_1,b_2) 的不同点时, 或者有 $a_1\neq b_1$, 或者有 $a_2\neq b_2$. 不妨设 $a_1\neq b_1$, 则 E_1 的点 a_1 和 b_2 具有两个不相交的邻域 V_1 和 W_1; 因此, 点 a 和 b 也具有两个不相交的邻域 $V_1\times E_1$ 和 $W_1\times E_2$.

例 由于 $\mathbb{R}$ 是分离空间, 所有 $\mathbb{R}^n$ 也是分离空间.

所有 $\mathbb{R}^n$ 的子空间因而也是分离空间; 特别地, S_{n-1} 是分离空间.

命题 10-5 对于任何分离空间 E, $E\times E$ 的对角集合 $\Delta=\{(a,b)\in E\times E \mid a=b\}$ 是 $E\times E$ 中的闭集.

事实上, 设 $(a,b)\notin\Delta$; 则 E 的不同点 a, b 可以有两个不相交的邻域 V_a, V_b; 积 $V_a\times V_b$ 是 (a,b) 在 $E\times E$ 中的邻域, 且与 Δ 不相交, 因而 $(E\times E)\diagdown\Delta$ 是 (a,b) 的邻域.

Δ 的补集是它的每一点的邻域, 从而它是开集; 因此, Δ 是闭集.

推论 1 如果 f, g 是空间 X 到分离空间 E 的连续映射, 那么满足 $f(x)=g(x)$ 的 X 的点 x 的全体是闭集.

事实上, 设 h 是 X 到 $E\times E$ 的映射 $x\to(f(x),g(x))$; 它是连续的; 而所求的集合无非就是 $h^{-1}(\Delta)$. 由于 Δ 是闭集, 故这个集合是闭集.

推论 2 如果 f 是空间 E 到分离空间 F 的连续映射, 那么 f 的图像 $\varPhi$ 在 $E\times F$ 中是闭集.

事实上, $\varPhi$ 是 $E\times F$ 中满足 $y=f(x)$ 的点 (x,y) 的集合; 既然映射 $(x,y)\to y$ 和 $(x,y)\to f(x)$ 都是 $E\times F$ 到 F 的连续映射, 由上述推论, $\varPhi$ 是闭集.

Z 必须注意推论 2 的逆不成立, 甚至当 E 和 F 都是分离空间, f 的图像仍可能在 f 不连续时为闭集.

例如, 设 f 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的如下定义的映射:

$$f(0)=0; \quad f(x)=1/x, \text{ 当 } x\neq 0.$$

f 的图像是曲线 $xy-1=0$ 和集合 $\{0\}$ 的并, 因而是闭集; 然而 f 在点 0 上不连续.

§11. 紧空间

在第 3 节中, 我们已经建立了 $\mathbb{R}$ 的有界闭区间的一条重要性质, 它被命名为 Heine-Borel-Lebesgue 定理; 其重要性在于, 它能使某些整体研究被局部研究所代替.

我们也可研究其他具有类似性质的拓扑空间; 例如我们将看到 $\mathbb{R}^n$ 中的所有有界闭集就有这种性质.

这里我们对具有这种性质的空间进行一般研究.

定义 11-1 我们说空间 E 是**紧的**, 是指它是分离的, 且由 E 的任何开覆盖中都可选出有限子覆盖.

在这一定义中, 条件 "E 是分离的" 是为了避免一些用处不大的空间, 例如有粗拓扑的空间.

例 所有有限分离空间是紧的. 相反, $\mathbb{R}$ 不是紧空间 (参见第 3 节). 下列定理将给我们提供一大类紧空间.

熟悉紧性条件的多种等价形式是有益的. 下面是其中之二:

陈述 11-2 E 为分离空间, 且由 E 的其交为空集的任一闭集族中可选出有同样性质的有限子族.

这一条件是前面的定义的对偶; 事实上, 如果 $(G_i)_{i\in I}$ 是 E 的开集族, 那么公式 $E=\bigcup\limits_{i\in I}G_i$ 等价于

$$\varnothing=\bigcap_{i\in I}F_i, \quad \text{其中} \quad F_i=\complement G_i.$$

现在我们说 E 的子集族 $\mathscr{F}$ 具有**有限交性质**, 是指 $\mathscr{F}$ 的任何有限子族有非空交. 在这一约定下, 上述陈述显然等价于下列陈述:

陈述 11-3 E 为分离空间, 且 E 的任何有有限交性质的闭集族有非空交.

特别地, 我们可以叙述:

命题 11-4 在紧空间 E 中, 任何按包含关系为全序的非空闭集族有非空交. 例如, 任何递减的非空闭集列有非空交.

事实上, 全序集族的任何有限子族具有最小元素, 即这个子族的交, 这里它是非空的.

实直线不具有这种性质, 例如闭区间列 $[n, +\infty)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的交是空集.

命题 11-5 1° 在紧空间中, 任何点列至少有一个附着值.

2° 如果它有唯一的附着值, 那么序列收敛于这个值.

1° 利用定义 8-4 后用过的记号, 附着值集是非空闭集 $\overline{A}_n$ 的递减列的交.

2° 设 a 为 $A = \bigcap_1^\infty \overline{A}_n$ 的唯一元素. 对于 a 的任何邻域 V, 闭集 $\overline{A}_n \cap \complement V$ 显然有交为空集; 于是因为它们构成递减列, 其中之一必为空集, 即从某个 n 起, 有 $\overline{A}_n \subset V$, 尤其是 $A_n \subset V$.

更一般地可以验证, 任何由被赋以滤子基 $\mathscr{B}$ 的集合 X 到紧空间 E 的映射 f 至少有一个关于 $\mathscr{B}$ 的附着值, 并且如果 f 有唯一的附着值, f 就收敛于这个值. □

Z 在紧空间中, 序列 $\{a_n\}$ 形成的**点集** A 总是有聚点的; 事实上, A 可能是有限集, 甚至退化为一个点, 只要所有 a_n 都恒等; 换句话说, 当一点成为序列 (a_n) 的附着值时, 它或者是 a_n 的集合 A 的聚点, 或者是与无限个 a_n 重合.

命题 11-6 (Bolzano-Weierstrass 定理的类似)

1° 紧空间 E 的任何子集 A 至少有一个 E 中的聚点.

2° E 的任何在 E 中没有聚点的子集 A 是有限集.

显然这两条性质是等价的; 其中第二条性质可完全如同定理 3-3 那样来证明.

Z 反之, 不能断言 "任何其无限子集至少有一聚点的分离空间是紧空间"; 但是稍后我们将证明这个逆命题对于距离空间 E 是正确的.

命题 11-7 设 A 是空间 E 的分离子空间:

(A 是紧的) $\iff$ (任何 E 的覆盖 A 的开集族包含也覆盖 A 的有限子族).

证明 1° 如果 A 是紧的, $(\omega_i)_{i\in I}$ 是 E 的覆盖 A 的开集族, 那么 $(A\cap\omega_i)_{i\in I}$ 构成紧空间 A 的开覆盖; 因此, 存在 I 的有限子集 J, 使得 $(A\cap\omega_i)_{i\in J}$ 覆盖 A; 尤其是 $(\omega_i)_{i\in J}$ 也覆盖 A.

2° 反之, 假设 A 具有第二条性质. 设 $(\omega_i')_{i\in I}$ 为 A 的覆盖 A 的开集族; 所有 ω_i' 的形式为 $\omega_i' = A\cap\omega_i$, 其中 ω_i 是 E 的开集.

ω_i 覆盖 A, 故存在 I 的有限子集 J, 使得 $(\omega_i)_{i\in J}$ 也覆盖 A.

既然

$$\bigcup_{i\in J}(A\cap\omega_i) = A\cap\left(\bigcup_{i\in J}\omega_i\right) = A,$$

故有限族 $(\omega_i')_{i\in J}$ 也覆盖 A.

这就恰好指出, 由 A 的任何以开集 (ω_i') 组成的覆盖中, 我们总可选出有限子覆盖; 因此, A 是紧的. □

推论 11-8 对于任何 $a,b\in\mathbb{R}$, 闭区间 $[a,b]$ 是紧的.

这是定理 3-2 和我们刚证明的命题 11-7 的直接推论.

推论 11-9 设 E 为分离空间, (a_n) 为收敛于 E 的点 a 的 E 的点列. 那么集合 $A=\{a,a_1,a_2,\cdots\}$ 是紧的.

事实上, 首先 A 是分离空间; 然后设 (ω_i) 为以 E 的开集组成的 A 的覆盖. 于是存在含 a 的 ω_{i_0}. 由于这个开集是 a 的邻域, 故除了至多有限个 $a_{n_1},\cdots,a_{n_p}$ 以外, 它含所有 a_n. 而这有限个点又都分别含在 $\omega_{i_1},\cdots,\omega_{i_p}$ 中, 于是开集 $\omega_{i_0},\omega_{i_1},\cdots,\omega_{i_p}$ 组成 A 的有限覆盖. 因此, A 是紧集.

下面是一系列至关重要的定理.

定理 11-10 在紧空间 E 中, 任何点 a 有闭邻域基.

证明 设 ω 为 a 的开邻域, F 为 ω 的余闭集. 如果 a 的任何闭邻域 V 都不在 ω 中, 那么所有 V 都与 F 相交, 且由于 V 的族对于有限交是稳定的, $V\cap F$ 的族有有限交性质, 于是有非空交. 换句话说, 所有 V 有公共点 $b\neq a$. 但这是不可能的, 因为 E 是分离空间 (参见 8-2). 从而存在 V 包含在 ω 中. □

定理 11-11 在任何紧空间 E 中, 任何闭子集是紧空间.

证明 为了简化证明, 我们将利用一条十分适合我们问题的紧性判别准则, 例如用闭集表达的准则 11-3.

设 A 在 E 中闭, $(X_i)_{i\in I}$ 为空间 A 的具有有限交性质的闭集族.

由于 A 是闭的, X_i 也是 E 的闭集; 由于 E 是紧的, X_i 的交不是空的. 因此, A 是紧的. □

定理 11-12 在任何分离空间 E 中, E 的任何紧子空间在 E 中闭.

设 A 是 E 的紧子空间. 我们将指出 $\complement A$ 是开的.

设 $x_0\in\complement A$. 对于任何 $y\in A$, 令 V_y 和 W_y 分别为 x_0 和 y 的两个**不相交的开邻域**. 于是存在开集 W_y 的族的有限子族 $(W_{y_i})_{i\in I}$ 覆盖 A. 开集 $V=\bigcap\limits_{i\in I}V_{y_i}$ 是 x_0 的邻域, 且与每个 W_{y_i} 不相交, 从而也与 A 不相交; 换句话说, $V\subset\complement A$. 这样, $\complement A$ 是它的每一点的邻域, 从而是开集.

我们注意到, 关于 E 为分离空间的假设是本质的. 例如, 当 E 有粗拓扑且多于一点时, 任何退化为一点的 E 的子集是紧子空间, 但它不是闭集.

这条定理指出, 任何紧空间都可以称为 "绝对闭集", 因为它在所有包含它的空

间 (至少对于分离空间) 中都是闭集.

推论 11-13 (定理 11-11 和 11-12) *在任何紧空间 E 中, 闭子集类等同于紧子集类.*

推论 11-14 *$\mathbb{R}$ 的紧子空间全体是 $\mathbb{R}$ 的有界闭子集类全体.*

事实上, 如果 X 是 $\mathbb{R}$ 的有界闭子集, 那么存在包含 X 的区间 $[a,b]$; 由于 X 在 $\mathbb{R}$ 中闭, 故它在子空间 $[a,b]$ 中也是闭集, 而 $[a,b]$ 是紧的, 故 X 也是紧的.

反之, 如果 X 是 $\mathbb{R}$ 的紧子集, 那么 X 在 $\mathbb{R}$ 中闭, 因为 $\mathbb{R}$ 是分离空间. 另一方面, X 有界是因为开集列 $(-n,n)$ (其中 $n=1,2,\cdots$) 构成 X 的覆盖, 故从中可以选出覆盖 X 的有限子列, 其中最大的那个就包含 X.

定理 11-15 *在任何分离空间中, 两个紧集的并是紧集, 紧集的任意交是紧集.*

证明 设 A 和 B 是 E 的两个紧集.

1° 由于 E 是分离空间, 故 $A\cup B$ 也分离.

另一方面, $(A\cup B)$ 的任何开覆盖也是 A 和 B 的开覆盖. 从而可选出两个有限子覆盖, 其中一个是 A 的, 另一个是 B 的. 它们合在一起又组成 $(A\cup B)$ 的有限覆盖. 因此, $(A\cup B)$ 是紧集.

2° 如果 $(A_i)_{i\in I}$ 都是紧集, 那么它们中的每一个在 E 中都是闭集. 从而它们的交在 E 中闭, 尤其是在这些紧集的任意一个 A_{i_0} 中闭. 因此, 这一交是紧集 (定理 11-10). □

Z 显然, 紧集的无限族的并一般不是紧集.

定理 11-16 *对于任何紧空间 E 到分离空间 F 的连续映射 f, F 的子空间 $f(E)$ 是紧的.*

证明 首先由于 F 分离, 故 $f(E)$ 分离. 然后, 设 $(\omega_i)_{i\in I}$ 为 $f(E)$ 的用 $f(E)$ 的开集所组成的覆盖. 于是 $f^{-1}(\omega_i)$ 构成 E 的开覆盖, 从而由此可选出有限覆盖 $(f^{-1}(\omega_i))_{i\in J}$. 由于 $f(f^{-1}(\omega_i))=\omega_i$, 故 $(\omega_i)_{i\in J}$ 也覆盖 $f(E)$. 因此, $f(E)$ 是紧的. □

推论 11-17 *紧空间 E 到分离空间 F 的任何连续双射 f 是同胚.*

只需指出 f^{-1} 连续, 即对于任何 E 的闭集 X, $f(X)$ 在 F 中闭.

既然 X 在紧的 E 中闭, 故它也是紧的; 于是它在分离的 F 中的像 $f(X)$ 是紧集, 从而也是闭集.

这一推论为我们提供了由映射的连续性和双射性可导出其双方连续性 (即 f 和 f^{-1} 的连续性) 的一种重要情形.

推论 11-18 *紧空间 E 上的任何连续数值函数是有界的, 且在 E 上达到它的上确界和下确界.*

设 f 为 E 到 $\mathbb{R}$ 上的连续映射. $f(E)$ 是紧集, 故在 $\mathbb{R}$ 上为有界闭集, 于是包含它的下确界 b_1 和上确界 b_2. 因此, 在 E 上存在 x_1, 满足 $f(x_1) = b_1$; 存在 x_2, 满足 $f(x_2) = b_2$.

特别地, 当 E 上有 $f(x) > 0$ 时, 存在 $b > 0$, 使得在 E 上有 $f(x) \geqslant b$.

Z 如果 E 不是紧的, 那么 E 上的连续数值函数可以不是有界的, 即使有界, 也可以不达到它的上确界和下确界.

例如, 函数 $x \to x$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是有界的.

函数 $x \to x/(1+|x|)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 但不能达到它的两个确界.

函数 $x \to 1/x$ 在 $(0,1]$ 上不是有界的.

函数 $x \to x$ 在 $(0,1)$ 上有界, 但不能达到它的两个确界.

推论 11-19 如果 E 是分离空间 E_i 的积, 那么 E 的任何紧集在每个 E_i 上的投影是紧的.

事实上, 在每个 E_i 上的投影是连续映射.

紧空间的积 定理 11-11 和 11-16 为我们提供了一种构造紧空间的强有力的手段. 下面是另一种手段, 它对于多变量函数的研究特别方便.

定理 11-20 紧空间的任何有限积是紧空间.①

证明 根据拓扑积的结合律, 只需指出对于两个空间的积的定理.

设 $E = X \times Y$ 为紧空间 X 和 Y 的积. 由于 X 和 Y 都分离, 故 E 也分离 (命题 10-4).

现在设 $(\omega_i)_{i\in I}$ 为 E 的开覆盖. 对于任何 $m = (x, y) \in E$, 存在 $i_m \in I$, 使得 $m \in \omega_{i_m}$. 于是存在 x 和 y 在 X 和 Y 中的开邻域 V_m 和 W_m, 使得 $V_m \times W_m \subset \omega_{i_m}$. 令 $U_m = V_m \times W_m$.

既然对于任何 $x_0 \in X$, $X \times Y$ 的子集 $Y_0 = x_0 \times Y$ 与 Y 同胚, 故它也是紧集. $(U_m)_{m\in Y_0}$ 构成 Y_0 的开覆盖, 由此可选出有限覆盖

$$(U_{m_j})_{j\in J}, \quad 其中\ m_j = (x_0, y_j).$$

我们置

$$V_{x_0} = \bigcap_{j\in J} V_{m_j},$$

这是 x_0 的开邻域, 且显然有

$$\bigcup_{j\in J} \omega_{i_{m_j}} \supset V_{x_0} \times Y.$$

①这里的 "有限" 条件其实可以去掉, 即我们有所谓 Tihonov 定理: 紧空间的任何积是紧空间. 但这是与选择公理等价的定理. 本书尽量避免运用选择公理. —— 译者注

V_{x_0} 构成 X 的开覆盖, 由此可选出有限覆盖. 每个对应的 x_0 (一共有有限个) 与开集 ω_i 的子族 $(\omega_{i_{m_j}})$ 相联系; 这些族的并是覆盖 E 的有限族. □

推论 11-21 $\mathbb{R}^n$ 的任何紧子空间是 $\mathbb{R}^n$ 的闭集和有界集 (A 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界集, 如果它包含在一个各边有界的方块中).

事实上, 如果 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集, 那么它在 $\mathbb{R}^n$ 中闭; 另一方面, A 在每一因子空间 $\mathbb{R}$ 上的投影是紧的, 故它包含在某个有界区间中; 因此, A 包含在某个有有界基的方块中.

反之, 如果 A 是有界闭集, 即它是紧区间 $[a_i, b_i]$ 的有限积的闭子集; 这样的积是紧集, 故 A 也是紧集.

例 $\mathbb{R}^n$ 的球面 S_{n-1} 是有界闭集, 故它是紧集. 由此得到圆环 $(S_1)^p$ 也是紧集.

拓扑空间的相对紧集 我们已经看到 $\mathbb{R}^n$ 的紧集无非就是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭子集; 既然 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界子集有有界闭包, 从而可知 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集与 $\mathbb{R}^n$ 中的紧闭包的集合是一回事.

同样, 在任意的拓扑空间中, 我们可以期望, 起着有界集的作用的集合就是具有紧闭包的那种集合. 我们给这种集合一个专门名称:

定义 11-22 我们说拓扑空间 E 的子集 A 是**相对紧集**, 是指它的闭包 $\overline{A}$ 是紧集.

很明显, 这个定义不是对于 A 的拓扑而言的, 而是对于 (A, E) 这个二元组而言的; 例如, 区间 $(0, 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 中是相对紧集, 但在其自身中则不是.

下面是几条直接的性质:

1° 如果 A 在 E 中相对紧, 那么 A 的任何子集也相对紧.

2° 紧空间 E 的任何子集是相对紧集.

3° 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 在分离空间 E 中相对紧, 那么它们的并也相对紧.

4° E 的相对紧集 A 的任何点列在 E 中至少有一个附着值.

§12. 局部紧空间. 紧化

有许多空间其本身并不紧, 但它的局部可看作紧空间; $\mathbb{R}$ 就是这样的例子. 确切地说:

定义 12-1 我们称分离空间 E 为**局部紧空间**, 是指它的每一点至少有一个紧邻域.

例 1° 任何紧空间是局部紧的.

2° 任何离散拓扑空间是局部紧的 (例如 $\mathbb{Z}$).

3° 直线 $\mathbb{R}$ 是局部紧的; 事实上, 首先 $\mathbb{R}$ 是分离的; 其次, 对于任何 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得 $a < x < b$, 且 $[a, b]$ 是 x 的紧邻域.

此外, 我们知道 $\mathbb{R}$ 不是紧的.

4° $\mathbb{R}$ 的子空间 $\mathbb{Q}$ 既不是紧的, 也不是局部紧的; 事实上, 例如假设 0 在 $\mathbb{Q}$ 中有紧邻域 V; 于是 0 的邻域 V 包含形为 $\mathbb{Q} \cap [-a, a]$ 的子邻域; 由于后者在 $\mathbb{Q}$ 中闭, 集合 $A = \mathbb{Q} \cap [-a, a]$ 也将是紧的; 然而, 这明显是不成立的, 因为对于任何无理数 $x \in [-a, a]$, 闭集 $A \cap \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$ 的递减列有空的交.

命题 12-2 *在局部紧空间中, 任何点有紧邻域基.*

证明 在局部紧的 E 中, 设 ω 为点 a 的开邻域. 由假设, a 有紧邻域 K. 在紧空间 K 中, a 有闭以至紧的邻域 V 包含在 $K \cap \omega$ 中 (参见 11-10). 然而, 由于 K 是 a 在 E 中的邻域, 故邻域 V 也是 a 在 E 中的邻域, 它就是所求的紧邻域. □

下面的一些命题为我们提供了构造局部紧空间的有力方法.

命题 12-3 *局部紧空间的任何闭子集是局部紧的.*

证明 设 E 为局部紧空间, A 为 E 的闭子集. 任何 $x \in A$ 在 E 中有紧邻域 V. 集合 $V \cap A$ 在 V 中闭, 因而也是紧的; 由于这是 x 在 A 中的一个邻域, 它说明这点在 A 中有紧邻域. 最后, A 是分离的, 因为它包含在分离空间 E 中; 从而它就是局部紧的. □

例 任何 $\mathbb{R}^n$ 的代数流形是局部紧的.

命题 12-4 *如果 A 和 B 是分离空间的两个局部紧子空间, 那么它们的交也是局部紧的.*

证明 首先 $A \cap B$ 是分离的; 其次, 对于任何 $x \in A \cap B$ 存在 x 的两个紧邻域 V 和 W, 分别在 A 和 B 中; 集合 $V \cap W$ 是 x 在 $A \cap B$ 中的邻域, 且它是紧的. □

Z 相反, A 和 B 的**并**可以不是局部紧的. 例如, 设 A 为 $\mathbb{R}^2$ 的由满足 $x > 0$ 的点 (x, y) 所组成的子集, 又设 $B = \{(0, 0)\}$; 集合 $A \cup B$ 不是局部紧的, 因为点 $(0, 0)$ 在 $A \cup B$ 中没有任何紧邻域.

命题 12-5 *局部紧空间的任何有限积也是局部紧的.*

证明 显然只需对两个空间 A, B 来证实这一命题.

由于 A 和 B 都是分离的, 故 $A \times B$ 也分离.

另一方面, 对于任何 $(x, y) \in A \times B$, 点 x 和 y 分别在 A 和 B 中有紧邻域 V 和 W. 积 $V \times W$ 是 (x, y) 的所求紧邻域. □

例 空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $S_1 \times \mathbb{R}$ 是局部紧的.

Z 定理 11-16 对于局部紧空间没有相应的结果; 换句话说, 不能错误地认为: "任何可作为局部紧空间的连续映射的像的分离空间还是局部紧的".

例如, $\mathbb{Q}$ 是可数的, 故存在 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的满射 $n \to f(n)$; 因为 $\mathbb{Z}$ 离散, 所以 f 连续. 然而, $\mathbb{Q}$ 不是局部紧的, 尽管 $\mathbb{Z}$ 是局部紧的.

命题 12-6 假设 E 是局部紧空间, 但不是紧空间, f 为 E 上的连续数值函数, 满足

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

(其意义为对于任何 $h > 0$, 存在紧集 $K \subset E$, 使得在 K 以外, $f(x) > h$), 那么 f 有下界, 且达到它的下确界.

证明 设 a 为 E 的任意点, h 为大于 $f(a)$ 的数.

由假设, 存在紧集 $K \subset E$, 满足在 K 以外有 $f(x) > h$. f 在 K 上的限制是连续的, 从而在 K 的点 b 达到下确界 m.

对于任何 $x \notin K$, 有

$$f(x) > h > f(a) \geqslant m.$$

对于任何 $x \in K$, 有

$$f(x) \geqslant m.$$

因此, m 是 f 在 E 上的下确界, 且它在点 b 上被达到.

注意, 使 $f(x) = m$ 的 x 的集合是闭集, 且包含在 K 中; 因此, 这是一个紧集.□

我们可用类似的方式证明, 对于 E 上的任何连续数值函数 f, 如果当 $x \to \infty$ 时 (即沿由 E 的紧集的补集组成的滤子基) 它趋向于有限值 l, 那么它有界, 且达到它的不同于 l 的上确界和下确界.

例 12-7 (D'Alembert-Gauss 定理) 设 $P(z)$ 为 z 的任意复系数多项式, 其次数大于 0. 数值函数 $z \to |P(z)|$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上连续; 另一方面, 如果 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ (其中 $a_n \neq 0$), 那么对于任何 $z \neq 0$, 我们可把它写成

$$|P(z)| = |a_n| \times |z|^n \times |1 + a_{n-1}/(a_n z) + a_{n-2}/(a_n z^2) + \cdots + a_0/(a_n z^n)|.①$$

因此, 当 $z \to \infty$ 时, $|P(z)| \to +\infty$.

命题 12-6 的假设都满足, 从而可以肯定 $|P(z)|$ 在某一点 z_0 上达到它的下确界.

我们将证明 $P(z_0) = 0$; 为此, 置 $z = z_0 + u$; 我们有:

$$P(z) = P(z_0 + u) = c_0 + c_1 u + \cdots + c_n u^n.$$

①原书此处误作: $|a_n| \times |z|^n \times |1 + a_1/z + a_2/z^2 + \cdots + a_n/z^n|$. —— 译者注

我们要证明 $c_0=0$. 假设 $c_0\neq 0$, 且 c_p 为 c_0 以后的第一个非零系数 ($p\leqslant n$). 如果 λ 表示方程

$$\lambda^p+\frac{c_0}{c_p}=0$$

的某个根, 且令 $u=\lambda v$, 那么多项式 $P(z)$ 变为:

$$P(z)=c_0[1-v^p-v^p\varepsilon(v)],$$

其中 $\varepsilon(v)$ 随 v 趋向于 0.

对于任何满足 $0<v\leqslant 1$ 的实数 v, 有

$$|P(z)|\leqslant |c_0|[(1-v^p)+v^p|\varepsilon(v)|]=|c_0|[1-v^p(1-|\varepsilon(v)|)].$$

因此, 只要 v 小到使 $|\varepsilon(v)|<1$, 就有 $|P(z)|<|c_0|$. 这样由假设 $c_0\neq 0$ 导得矛盾. 总之, 任何次数大于 0 的多项式 $P(z)$ 至少有一个根.

无限远点和紧化 在命题 12-6 的陈述中, 表达式 "$x\to\infty$" 不仅仅是一种方便的说法. 事实上, 我们可以指出, 对于任何局部紧但非紧的空间 E, 总可在 E 上附加一个称为 E 的无限远点的补充点 ω, 并对集合 $E\cup\{\omega\}$ 赋以一种使其成为紧空间的拓扑 (而且这种拓扑是唯一的), 而它在 E 上的迹就是原来的拓扑; 这就使上述说法变得很确切.

更一般地, 我们还可试图求出使 E 成为其处处稠密子空间的紧空间 $\widehat{E}$; $(\widehat{E}\diagdown E)$ 的点于是都可解释为 E 的无限远点. 这种空间 $\widehat{E}$ 实现了所谓 E 的**紧化**.

根据分析或集合的各种需要, 我们会对这样那样的紧化感兴趣; 例如, 在投影几何中所用的 $\mathbb{R}^n$ 的紧化是被称为 n 维投影空间的紧空间 P_n, 它等同于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的通过 0 的直线全体再被赋以适当的拓扑.

我们在这里只研究两个简单的例子.

例 12-8 $\mathbb{R}^n$ 通过一个无限远点的紧化 由

$$x\to\frac{x}{\|x\|^2}=\frac{x}{\sum x_i^2}$$

定义的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极点为 0、幂为 1 的反演 f 是 $\mathbb{R}^{n+1}\diagdown\{0\}$ 到自身的同胚.

它把 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的超平面 $x_{n+1}=1$ 变为 $S\diagdown\{0\}$, 其中 S 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的直径在 $(0,A)$ 处的球面, 这里 A 为点 $(0,0,\cdots,0,1)$.

由于 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的超平面的典则映射 $g\colon(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(x_1,x_2,\cdots,x_n,1)$ 是同胚, 故 $\mathbb{R}^n$ 到 $S\diagdown\{0\}$ 上的双射 $f\circ g$ 也是同胚. 如果通过这个同胚我们把 $\mathbb{R}^n$ 和 $S\diagdown\{0\}$ 看作一样, 那么球 S 就实现了所求的 $\mathbb{R}^n$ 的紧化; 它唯一的无限远点是点 0.

对于 $n=1$, S 是圆周.

对于 $n=2$, S 是二维球面; 当我们把 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$ 看作一样时我们称它为 Riemann 球面; 它在研究复平面时非常有用, 特别是因为同胚 $f \circ g$ 保持角度不变 (我们称它为 “保形映射”).

例 12-9 扩充直线 $\overline{\mathbb{R}}$ 我们刚才把 $\mathbb{R}$ 通过一个无限远点来紧化. 在分析中利用另一种紧化也很方便. 在第 5 节中, 我们已经定义了扩充直线 $\overline{\mathbb{R}}$, 并且在 § 7 中也指出, $\overline{\mathbb{R}}$ 与赋以序拓扑的 $[-1,1]$ 同胚.

另一方面, 由于 $[-1,1]$ 是区间, 故它的开区间是 $\mathbb{R}$ 的开区间的迹; 因此, $[-1,1]$ 的序拓扑恒同于由 $\mathbb{R}$ 的拓扑诱导的拓扑; 从而 $[-1,1]$ 是紧的, 故 $\overline{\mathbb{R}}$ 同样是紧的.

此外, 由 $\overline{\mathbb{R}}$ 在其子空间 $\mathbb{R}$ 上诱导的拓扑恒同于 $\mathbb{R}$ 原来的拓扑; 因此, $\overline{\mathbb{R}}$ 恰好构成 $\mathbb{R}$ 的一种紧化.

$\overline{\mathbb{R}}$ 的任何非空子集 X 有上、下确界, 因为这在 $[-1,1]$ 中是成立的; 当 X 为闭集时, 这两个确界属于 X.

$+\infty$ 在 $\mathbb{R}$ 上的邻域基可由区间 $[n,+\infty]$ 或 $(n,+\infty]$ (其中 $n \in \mathbb{N}$) 组成; 对于 $-\infty$ 有类似的陈述.

§13. 连通性

我们将试图确切说明这样的直观思想: $[0,1] \cup [2,3]$ 这样的集合可以说有两块, 而 $[0,1]$ 则只有一块.

当拓扑空间 E 的两个子集 A, B 包含在两个不相交的闭集中时, 就认为它们在 E 中完全分离那是十分自然的; 注意到这点, 我们就有下列精确的定义:

定义 13-1 *我们说拓扑空间 E 是**连通的**, 是指不存在任何把 E 分为两个非空闭子集的分划.*

这一性质 (通过对偶) 显然等价于下列性质中的每一条:

性质 13-2 *不存在任何把 E 分为两个非空开子集的分划.*

性质 13-3 *E 的同时是开集和闭集的子集只有 E 和 $\varnothing$.*

我们说空间 E 的**子集 A 是连通的**, 是指 E 的子空间 A 是连通的.

例 1° 稍后在研究距离空间时, 我们将证明 $\mathbb{R}$ (以至 $\mathbb{R}$ 的任何区间) 是连通的; 暂时我们先承认它.

2° 相反, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是连通的; 更一般地可指出, 如果 $\mathbb{R}$ 的子集 A 不是区间, 它就不连通; 事实上, 这时存在两个不同的点 $x, y \in A$, 使得 $[x,y] \not\subset A$; 于是存在点 $a \in [x,y]$ 使得 $a \notin A$. 非空集合 $A \cap (-\infty, a)$ 和 $A \cap (a,+\infty)$ 在 A 中都是开的, 这就构成一种分划; 因此, A 不是连通的.

总之, $\mathbb{R}$ 中仅有的连通子集是区间.

定理 13-4 设 X, Y 为拓扑空间 E 的两个互补子集, A 为 E 的连通子集. 如果 A 与 X 和 Y 都相交, 那么 A 也与它们的边界相交.

证明 $\mathring{X}, \mathring{Y}$ 与 X, Y 的边界 F 组成 E 的一种分划; 因此, 当 A 与 F 不相交时, $\mathring{X} \cap A$ 和 $\mathring{Y} \cap A$ 就构成 A 的分成两个非空相对开集的分划. 这是不可能的, 因为 A 连通. □

下面是某些通常可用来证明集合连通的定理.

定理 13-5 设 $(A_i)_{i\in I}$ 是 E 的连通子集族. 如果这一族的交非空, 那么它们的并是连通的.

证明 置 $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. 考虑 A 的任何分成两个开集 O_1 和 O_2 的分划. 对于任何 i, $A_i \cap O_1$ 和 $A_i \cap O_2$ 是相对于 A_i 的开集, 而由于 A_i 连通, 两者之一必定是空集. 因此, 任何 A_i 或者在 O_1 中, 或者在 O_2 中. 既然所有 A_i 至少有一个公共点 x, 不妨设它属于 O_1. 于是 O_1 包含所有 A_i, 且 O_2 是空集. 因此, A 是连通的. □

例 $\mathbb{R}^n$ 的任何凸子集[①] X 是连通的; 事实上, 对于任何 $a \in X$, X 是包含 a 的线段的并, 这些线段的每一个都是连通的, 因为它们都同胚于 $[0,1]$.

特别地, $\mathbb{R}^n$、任何 $\mathbb{R}^n$ 的开或闭的方块、任何 $\mathbb{R}^n$ 的开或闭的球, 都是连通的.

定理 13-6 任何连通集的闭包是连通的.

证明 设 A 为空间 E 的连通子集. 对于 $\overline{A}$ 的分为 $\overline{A}$ 上的两个开集 O_1 和 O_2 的任何分划都对应有 A 的分为 A 上的两个开集 $A\cap O_1$ 和 $A \cap O_2$ 的分划. 既然 A 是连通的, 其中之一例如 $A \cap O_1$ 是空集; 由于 A 在 $\overline{A}$ 上处处稠密, 故集合 O_1 也是空集. 因此, $\overline{A}$ 是连通的. □

类似的证明可指出, 任何满足 $A \subset B \subset \overline{A}$ 的 B 也是连通的.

例 任何 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的球面同胚于在第 12 节中对于紧化用过的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的球面 S; 既然 S 是同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间的闭包, 由 $\mathbb{R}^n$ 是连通的, S 也是连通的. 因此, 任何球面是连通的.

定理 13-7 连通空间的任何连续像是连通的.

证明 设 f 是连通空间 E 到 F 上的连续满射. 对于 F 的任何既开又闭的子集 X, $f^{-1}(X)$ 在 E 上也是既开又闭的, 因此这是 E 或者 $\varnothing$; 而 $X = f(f^{-1}(X))$, 故 $X = F$ 或者 $\varnothing$; 即 F 连通. □

定义 13-8 我们称任何连通紧空间为**连续统**.

[①] $\mathbb{R}^n$ (以及一般的实线性空间) 中的子集 X 称为凸集, 是指它对于任何 $x_1, x_2 \in X$, 线段 $\{x : x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, \lambda \in [0,1]\} \subset X$. —— 译者注

由定理 11-16 和 13-7, 任何是连续统 E 的连续像的分离空间是连续统.

在研究距离空间时, 我们将证明距离连续统的一条性质, 它将使连通性的概念更为直观.

例 1° $\mathbb{R}$ 的区间 $[-1,1]$ 是连续统; 因此, $\overline{\mathbb{R}}$ 也是连续统;

2° 对于 $\mathbb{R}^n$ 的任何有界连通子集 X, $\overline{X}$ 是连通紧集, 从而是连续统.

例如, $(0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x \to \sin(1/x)$ 的图像 Γ 是 $(0,1]$ 的连续像, 因此, 这是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子集; 它的闭包, 即 Γ 与区间 $0 \times [-1,1]$ 的并是连续统.

在拓扑学中我们经常利用这一连续统来构造一些反例.

定义 13-9 我们称空间 E 的任何连通开子集为 E 的**区域**.

命题 13-10 为使 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 D 是区域, 必须且只需 D 的任意两点 p 和 q 都在一条包含在 D 中的其边平行于坐标轴的折线上.

证明 设 $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的点列, 其中每一条线段 $[a_i, a_{i+1}]$ $(i < p)$ 都平行于 $\mathbb{R}^n$ 的某坐标轴. 通过递推直接由定理 13-5 可得, 由这些线段的并组成的折线是连通的.

于是如果对于任何 $p, q \in D$, 这两个点都属于某条包含在 D 中的这种折线, 固定 p, 而使 q 遍历 D, 我们看到 D 是包含 p 的折线的并; 因此, D 是连通的.

反之, 设 D 连通. 对于任何 $x, y \in D$, 我们用 $x \sim y$ 表示这两个点是某条上述类型的折线的端点. 直接可得关系 $\sim$ 是 D 中的等价关系, 且每一等价类都是开集 (因为对于任何 D 中的包含 x 的开方块中的点 y, 有 $x \sim y$); 但这样的等价类只能是唯一的, 否则 D 就会有分成两个非空开集的分划 (例如, 一个是等价类之一, 另一个是其他等价类的并); 换句话说, 对于任何 $x, y \in D$, 有 $x \sim y$. □

例 在 $\mathbb{R}^n$ 中任何开球、任何开方块、任何闭球或任何闭方块的补集都是区域.

空间的连通成分 我们现在可以把非连通空间的 "块" 的模糊概念精确化, 以研究非连通空间的结构.

定义 13-11 对于空间 E 的任何点 x, 我们称 E 的含 x 的连通子集的并 $C(x)$ 为 x 的**连通成分**.

由定理 13-5, $C(x)$ 是连通集; 另一方面, 由于 $\overline{C(x)}$ 也是连通的, 且由构造, $C(x)$ 是 E 的含 x 的最大连通子集, 故有 $C(x) = \overline{C(x)}$, 换句话说, $C(x)$ 是**闭集**.

"如果 x_1 与 x_2 属于 E 的同一连通子集, 那么记为 $x_1 \sim x_2$"; 在 E 上这样的二元关系显然是等价关系. 既然对于任何 x, $C(x)$ 是含 x 的等价类, 故集合 $C(x)$ 也可定义为上述等价关系所联系的等价类. 这就是为什么我们把它们称为 E 的**连通成分**.

例 1° 如果 E 连通, 那么它只有一个连通成分, 即 E 本身.

2° 在空间 $\mathbb{Q}$ 中, 任何连通子集归结为一点, 于是对于任何 $x \in \mathbb{Q}$, $C(x) = \{x\}$.

3° 在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 中, 连通成分为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$.

4° 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 子空间 $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ 有连通成分为直线 $x \times \mathbb{R}$, 其中 $x \in \mathbb{Q}$.

5° 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 由双曲线 $xy = 1$ 和它的渐近线的并构成的子空间一共有三个连通成分.

定义 13-12 (局部连通空间) 我们说空间 E 在 E 的点 x 上**局部连通**, 是指 x 有连通邻域基.

我们说 E 局部连通, 是指它在每一点上局部连通.

例 1° $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}$ 的任何区间都是局部连通的.

2° 更一般地, $\mathbb{R}^n$ 的任何凸子集 A 是局部连通的; 事实上, 任何点 $x \in A$ 有由 A 与包含 x 的 $\mathbb{R}^n$ 的开方块的交所组成的凸邻域基.

3° $\mathbb{Z}$ 是局部连通的.

4° 相反, $\mathbb{Q}$ 不在任何点上局部连通.

命题 13-13 E 局部连通等价于对于 E 的任何开集 ω, ω 的连通成分都是开集.

证明 1° 设 E 局部连通; ω 为 E 的开集; C 为 ω 的一个连通成分.

对于任何 $x \in C$, 存在包含在 ω 中的 x 的连通邻域 V; 我们显然有 $V \subset C$, 因此, C 是 x 的邻域. 由于 C 是它的每一点的邻域, 故它是开集.

2° 反之, 假设 E 的任何开集的任何连通成分都是开集. 对于任何 $x \in E$ 和任何 x 的邻域 V, 包含 x 的 $\mathring{V}$ 的连通成分 C 是开的; 因此, C 是我们所求的包含在 V 中的 x 的连通成分. □

例 1° 由于 $\mathbb{R}$ 是局部连通的, 对于任何闭集 $F \subset \mathbb{R}$, $\complement F$ 的连通成分是开集, 于是这是些开区间; 这种区间的两个端点属于 F.

由于每个这样的区间至少包含一个有理数, 且它们都不相交, 故它们的个数有限或者可数有限.

2° 命题 13-13 提供的准则对于指出一个空间不是局部连通的, 常常是很方便的. 例如, 考虑定义 13-8 的例中所定义的连续统 $\overline{\Gamma}$. 设 ω 是 $\overline{\Gamma}$ 的定义为 $\omega = \overline{\Gamma} \cap (\mathbb{R} \times (-1/2, 1/2))$ 的开集 (图 2). ω 的连通成分之一是区间 $0 \times (-1/2, 1/2)$, 它在 $\overline{\Gamma}$ 中不是开集; 因此, $\overline{\Gamma}$ 不是局部连通的 (尽管它在 Γ 的所有点上是局部连通的).

弧连通性 在许多数学分支中, 我们只利用一种非常正规的连通空间; 例如, 在微分几何中, 所利用的空间一般总是局部同胚于 $\mathbb{R}^n$ 或者 $\mathbb{R}^n$ 的闭半空间. 这样, 利用弧连通的概念很方便.

定义 13-14 我们说空间 E **弧连通**, 是指对于任何 $a, b \in E$, 存在 $\mathbb{R}$ 的区间 $[\alpha, \beta]$ 到 E 的连续映射 f, 使得 $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$.

我们说 E **局部弧连通**, 是指 E 的任何点有弧连通邻域基.

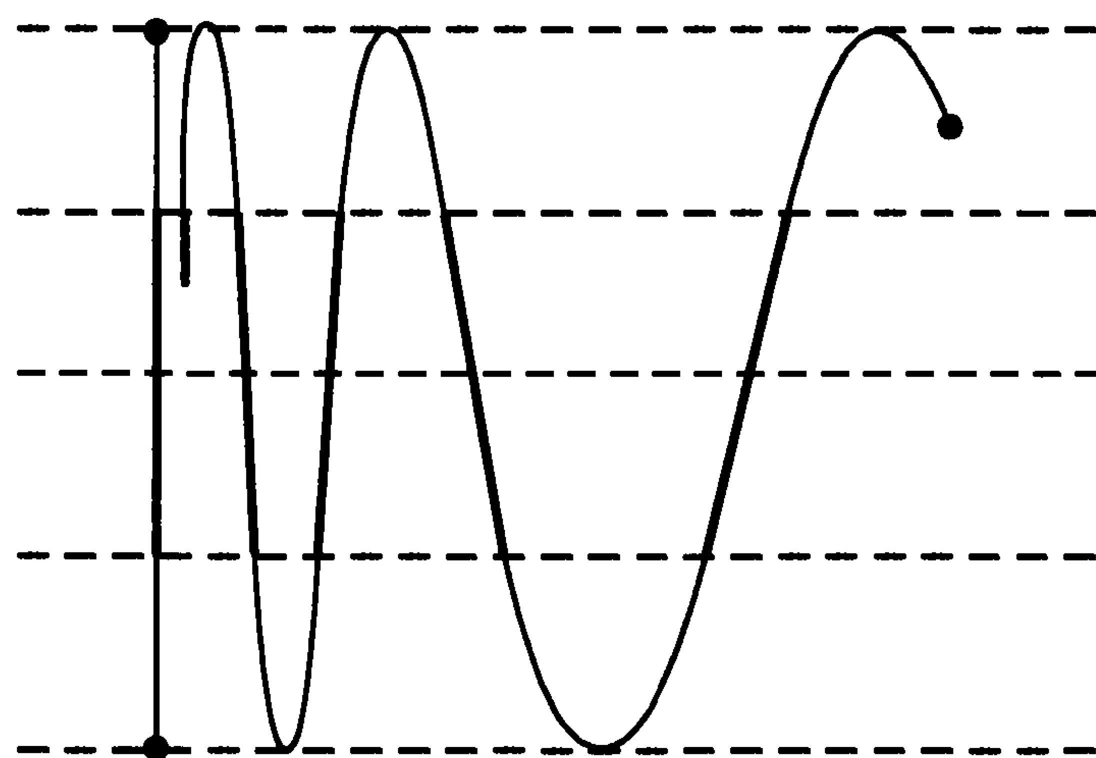


图 2

由于区间 $[\alpha,\beta]$ 的连续像是连通的, 显然, 任何弧连通空间是连通的; 但反之不成立 (可以对上面例 2 的连续统 $\overline{\Gamma}$ 进行验证).

同样, 任何局部弧连通空间是局部连通的.

"弧连通" 的说法来自: 如果存在 $\mathbb{R}$ 的区间 $[\alpha,\beta]$ 到 E 的连续映射 f, 使得 $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$ (其中 $a\neq b$), 那么在 $f([\alpha,\beta])$ 上也存在端点为 a,b 的简单弧. 但这后一性质 (并非显然) 用得很少, 原因在于:

设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta<\gamma$, f 为 $[\alpha,\gamma]$ 到 E 的映射; 如果 f 在 $[\alpha,\beta]$ 和 $[\beta,\gamma]$ 上的限制是连续的, 那么 f 也连续. 相反, 如果此外我们还要求 f 在 $[\alpha,\beta]$ 和 $[\beta,\gamma]$ 上是双射, 那么它并不能导致 f 在 $[\alpha,\gamma]$ 上也是双射. 利用简单弧连通的定义因而缺乏灵活性①.

例 13-15 1° $\mathbb{R}^n$ 的任何区域是弧连通和局部弧连通的.

2° $\mathbb{R}^n$ 的任何凸子集也是弧连通和局部弧连通的.

3° 设 E 为连通空间; 如果 E 局部弧连通, 那么它也弧连通 (照搬命题 13-10 的证明).

这正是在微分几何中所研究的局部欧几里得流形的情形.

下列性质可以作为练习来验证:

4° 任何弧连通空间的连续像是弧连通的.

5° 对于任何交非空的弧连通集合族 (E_i), E_i 的并是弧连通的.

6° 弧连通空间的有限族的积也是弧连通的.

§14. 拓扑群、拓扑环和拓扑域

拓扑群的概念产生于对诸如加法群 $\mathbb{R}$ 或者依赖于有限个参数的变换群 (例如 $\mathbb{R}$ 的膨胀群 $x\to\lambda x+a$, $\lambda\neq 0$) 等特殊情形的研究. 在这些不同的例子中, 所研究的集合同时具有群结构和拓扑结构, 且这两种结构在群运算连续的意义下相容.

①作者在这里是要说明: 证明 "$f([\alpha,\beta])$ 上也存在端点为 a,b 的简单弧" 这件事并不简单. 原因在于 f 不一定是 $[\alpha,\beta]$ 和 $f([\alpha,\beta])$ 之间的双射, 它使得 $f([\alpha,\beta])$ 上的拓扑变得复杂起来. 著名的 Peano 曲线甚至可以填满一个方块. —— 译者注

更一般地, 如果 E 是同时具有拓扑结构和由几种运算定义的代数结构, 我们称它为某种拓扑代数结构, 是指 E 的代数运算对于给定的拓扑连续, 其意义将对每种拓扑再进一步明确.

定义 14-1 (拓扑群) *拓扑群 G 是被赋以拓扑的群, 对于这个拓扑, 函数 x^{-1} 和 $(x \top y)$ 连续.*

更确切地说, 我们假设 G 到 G 的映射 $x \to x^{-1}$ 和 $G \times G$ 到 G 的映射 $(x, y) \to x \top y$ 连续.

*当这些条件满足时, 我们还说, 给定的拓扑*与 G 的群结构相容.

例 1 被赋有通常拓扑的加法群 $\mathbb{R}$ 是拓扑群.

例 2 设 $\mathbb{R}^*$ 是不等于 0 的实数构成的乘法群. $\mathbb{R}$ 的拓扑在 $\mathbb{R}^*$ 上的诱导拓扑与它的群结构相容.

例 3 设 T 为 $\mathbb{R}$ 关于下列等价关系的商群: $x_1 \sim x_2$ 是指 $(x_1 - x_2)$ 是整数; 换句话说 (参见第二章) T 是 1 维圆环[①].

对于任何 $c \in T$, 置 $|c|$ 为 c 在 $\mathbb{R}$ 上的表示的绝对值的最小值. 于是如果对于 T 的任何元素对 x, y, 置

$$d(x, y) = |x - y|,$$

那么可以验证, 我们这样在 T 上定义了一个距离 (参见 § 15), 且它对于 T 的平移不变; 与此距离相联系的拓扑是与 T 的拓扑结构相容的.

被赋以这个拓扑的群 T 是 1 **维拓扑圆环**. 我们可以验证, 拓扑空间 T 与圆周 S_1 同胚.

例 4 绝对值为 1 的复数 $(a + ib)$ 的乘法群, 被赋以复平面的拓扑的诱导拓扑后, 是拓扑群. 可以证明, 它同构于 T.

例 5 如果把直线上的膨胀群: $x \to \lambda x + a$ (其中 $\lambda \neq 0$) 与平面 $\mathbb{R}^2$ 上横坐标非零的点 (λ, a) 的集合 D 看作一样, 且对 D 赋以 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑的诱导拓扑, 那么 D 变为拓扑群.

事实上, 如果 $s = (\lambda, a)$, 那么有

$$s^{-1} = (\lambda, a)^{-1} = (1/\lambda, -a/\lambda),$$

故 s^{-1} 是 s 在 D 上的连续函数; 另一方面, 如果 $s = (\lambda, a)$ 和 $s' = (\lambda', a')$, 那么有 $s \circ s' = (\lambda\lambda', \lambda a' + a)$; 故 $s \circ s'$ 也是数对 (s, s') 的连续函数.

[①] 1 维圆环即圆周. 把圆周在任意点 "切断" 并拉直, 那么圆周就变为线段. 但线段的两个端点看作同一个点. 如果令这个线段的长度为 1, 那么这个线段就等价于 T. 2 维圆环即通常的环面 ("轮胎形"), 它可看作 $\mathbb{R}^2$ 关于 $\mathbb{Z}^2$ 的商群. —— 译者注

例 6 如果 G 是任意群, 对它赋以离散拓扑, 那么它也成为拓扑群. 不用说, 这种拓扑一般是没有多大意义的.

推论 1° 对称映射 $x \to x^{-1}$ 是连续的, 它的逆就是它自身; 因此, 这是 G 到自身的同胚.

2° 对于任何 $a \in G$, 双射 $x \to a \cdot x$ 以及其逆 $y \to a^{-1} \cdot y$ 都是连续的.

同样, $x \to x \cdot a$ 以及其逆也都是连续的. 换句话说, 任何平移是 G 到自身的同胚. 更一般地, 任意变换: $x \to axb$ 也是如此.

这两个推论还可说成: 对于任何开集 $\omega \subset G$, 在对称映射下的像 ω^{-1} 是开集, ω 的平移 $a\omega$ 或者 ωa 也是开集.

一点的邻域 由任何平移是同胚可得, 一点 x_0 的邻域集可由单位元 e 的邻域集通过左或者右平移 x_0 可得. 更确切地说, x_0 的邻域集恒同于 $x_0 \cdot V$ 或者 $V \cdot x_0$[①]的集合, 其中 V 遍历 e 的邻域集.

对 G 的点 x_0 的邻域的研究从而归结为对 e 的邻域的研究.

单位元的邻域 1° 对于 e 的任何邻域 V, 它在对称映射下的像 V^{-1} 也是 e 的邻域.

2° 对于 e 的任何邻域 V, 存在 e 的子邻域 W, 使得

$$W \cdot W \subset V.$$[②]

第一条性质由对称映射是同胚而得. 由此还由 $V \cap V^{-1}$ 恒同于它在对称映射下的像, 可得 e 具有对称邻域基.

第二条性质只是简单地转述了这样的事实: $G \times G$ 到 G 上的映射 $(x, y) \to x \cdot y$ 在 $G \times G$ 的点 (e, e) 上连续.

此外, 这条性质并非是由于 G 的对称映射和平移映射都是同胚的缘故. 换句话说, 一种使对称映射和平移映射都是同胚的 G 上的拓扑, 并不一定使 G 上定义了拓扑群的结构.

为了在 G 上定义一种与 G 的群结构相容的拓扑, 我们经常如下操作: 给定含单位元 e 的 G 的子集族 $\mathscr{V}(e)$ (这些集合旨在成为 e 的邻域). 对于任何 $x_0 \in G$, 令 $\mathscr{V}(x_0)$ 为由 $\mathscr{V}(e)$ 通过左位移 x_0 而导得的族 $x_0 \cdot \mathscr{V}(e)$.

然后, 称任何有下列性质的 G 的子集 ω 为 G 的开集: 如果 $x \in \omega$, 那么存在 $\mathscr{V}(x)$ 的元素包含在 ω 中.

如果这些 ω 的集合满足拓扑空间的公理 O_1, O_2, O_3, 我们就定义了 G 上的一种拓扑; 如果这种拓扑使 xy 和 x^{-1} 都连续, 它就与 G 的结构相容. 我们称它是由族 $\mathscr{V}(e)$ 张成的.

---

①这里 $x_0 \cdot V = \{x_0 \cdot x \mid x \in V\}$, $V \cdot x_0 = \{x \cdot x_0 \mid x \in V\}$. ——译者注

②这里 $W \cdot W = \{x \cdot y \mid x \in W, y \in W\}$. ——译者注

拓扑群的积 设 G_1 和 G_2 为两个拓扑群. 积集合 $G = G_1 \times G_2$ 同时具有积群结构和积拓扑空间结构.

容易验证, G 上的积拓扑和 G 上的积群结构相容, 被赋以这两种结构的集合 G 称为拓扑群 G_1 和 G_2 的积.

同样可定义任意有限个拓扑群的积.

例 1 我们称 n 个恒同于加法拓扑群 $\mathbb{R}$ 的拓扑群的积为加法拓扑群 $\mathbb{R}^n$.

我们称 n 个恒同于拓扑圆环 T 的群的积 T^n 为 n 维圆环.

例 2 运算 $(n, G) \to G^n$ 是一种更一般的构造拓扑群的程序的特殊情形:

设 E 为任意集合, G 为拓扑群; G^E 为 E 到 G 的所有映射的集合. 用对于任何 $x \in E$ 成立的等式 $h(x) = g(x) \cdot f(x)$ 来定义 $h = g \cdot f$, 我们就在 G^E 上给出了一种群结构.

对于 e 在 G 上的任何邻域 v, 我们令 V 为 G^E 的对于任何 $x \in E$ 满足 $f(x) \in v$ 的元素全体. 集合 V 的族 $\mathscr{V}$ 在 G^E 上生成一种拓扑, 根据上面叙述的程序, 可以验证, 这个拓扑与 G^E 的群结构相容.

例 3 $\mathbb{C}^*$ 同构于乘法群 $\mathbb{R}_+^*$ 与 T 的积. 它的子群 $\mathbb{R}^*$ 同构于 $\mathbb{R}_+^*$ 与乘法群 $\{-1, +1\}$ 的积[①].

同构 连续表示 设 E 和 F 为两个拓扑群, f 为 E 到 F 的表示 (这就是说, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$). 我们说这是个连续表示是指映射 f 在 E 上连续.

等式 $f(x) = f(x \cdot x_0^{-1}) \cdot f(x_0)$ 表明如果一个表示 f 在 E 的一个点 e 是连续的, 则它在 E 的所有点 x_0 都是连续的.

如果 f 是群 E 到群 F 的代数同构, 且 f 又是同胚, 那么我们说, 拓扑群 E 和 F 同构.

例 1 (加法群 $\mathbb{R}$ 到自身的同构) 设 f 是加法群 $\mathbb{R}$ 到自身的连续表示. 置 $f(1) = a$. 由此可导得对于任意的整数 p 和 q, $q \neq 0$, 有 $f(p/q) = a(p/q)$; 换句话说, 对于任何有理数 x, 有 $f(x) = a \cdot x$. 由于映射 f 和 $x \to a \cdot x$ 都是连续的, 这个等式可延拓到整个 $\mathbb{R}$.

由于映射 $x \to a \cdot x$ 就是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的表示, 故 $\mathbb{R}$ 到自身的连续表示即映射 $x \to a \cdot x$. 除了 $a = 0$ 以外, 这样的表示总是同构.

注意, 还存在许多不同于上述的 $\mathbb{R}$ 到自身的非连续表示; 但它们的存在并不明显; 我们只知道用选择公理[②]来构造它.

[①] $\mathbb{C}^*$ 表示非零复数全体; $\mathbb{R}^*$ 表示非零实数全体; $\mathbb{R}_+^*$ 表示正实数全体. —— 译者注

[②] 关于选择公理可参看任何集合论方面的著作或网站 (例如, http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/choice.html). 本书的特点之一在于几乎所有结果都不利用选择公理. 不过, 这样也不得不把有些重要结果 (例如, Hahn-Banach 定理) 放到习题中去. 这里所说的结果参见第二章第 18 节末的译者注. —— 译者注

例 2　可以指出, 乘法拓扑群 $\mathbb{R}_+^*$ 与加法拓扑群 $\mathbb{R}$ 同构[①]. $\mathbb{R}_+^*$ 到 $\mathbb{R}$ 的任何同构由定义是一个对数函数; 对数函数的逆同构是指数函数.

例 3　例 1 的方法不难推广到 $\mathbb{R}^n$, 并可指出, $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的任何连续表示是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续映射; 我们已经研究过这种映射.

例 4　(T 到自身的连续同构)　我们建议作为练习, 证明 T 到自身的任何连续表示有形式为: $x \to n \cdot x$, 其中 n 为任意整数. 由此得到, 只存在两种 T 的连续自同构: 恒等映射和对称映射.

定义 14-2 (拓扑群上的连续周期函数)　*设 G 为加法交换群, f 为 G 到集合 E 的映射. 我们称对于所有 $x \in G$, 满足 $f(x+a) = f(x)$ 的 G 的每个元素 a 为 f 的周期.*

直接可得, f 的全体 P 构成 G 的子群, 它称为 f 的周期群.

我们说 f 是**周期函数**, 是指它的周期群不退缩为 G 的单位元 O.

命题 14-3　*拓扑群 G 到分离拓扑空间 E 的连续映射 f 的周期群 P 在 G 中是闭的.*

事实上, 对于任何 $b \in G$, 令 G_b 为满足 $f(b+a) = f(b)$ 的 $a \in G$ 的集合; 由于 G 到 E 的映射 $\varphi_b\colon a \to f(b+a)$ 是连续的, 且 $\{f(b)\}$ 在 E 中闭, 故集合 $\varphi_b^{-1}(\{f(b)\}) = G_b$ 是闭的. 而由定义

$$P = \bigcap_{b \in G} G_b,$$

因此, P 是闭的.

$\mathbb{R}$ 的闭子群　上述结果指出, 为了研究拓扑群上的周期函数, 研究 G 的闭子群是有意义的. 我们将仅对 $\mathbb{R}$ 进行这一研究.

命题 14-4　*$\mathbb{R}$ 的任何闭子群或者恒同于 $\mathbb{R}$, 或者恒同于 $\{0\}$, 或者是形为 $a \cdot \mathbb{Z}$ (其中 $a > 0$) 的离散子群.*

设 P 为 $\mathbb{R}$ 的闭子群.

如果 0 是 P 的聚点, 那么对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 P 的元素 x, 使得 $x \neq 0$, 且 $|x| < \varepsilon$; 在 $\mathbb{R}$ 的长度大于 ε 的任何区间里, 至少存在这种 x 的一个整数倍; 换句话说, P 在 $\mathbb{R}$ 上处处稠密, 而由它是闭集, 故有 $P = \mathbb{R}$.

---

①原书这里取代 “可以指出” 的是 “由第三章的一个命题可得”. $\mathbb{R}_+^*$ 到 $\mathbb{R}$ 的同构 f 由下列函数方程的解来决定:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

于是设 $a \in \mathbb{R}_+^*$ 满足 $f(a) = 1$, 易证对于任何有理数 p/q, $q \neq 0$, 有 $f(a^{p/q}) = p/q$, 再利用连续性, 可知 f 为以 a 为底的对数函数. 更确切地说, 这实际上是对数函数的一种定义. ——译者注

如果 0 是 P 的孤立点, 那么 P 的任何点都是孤立点, 于是由 P 是闭集, 每个集合 $P\cap[-l,l]$ 是紧的和离散的, 因而是有限的. 因此, 或者有 $P=\{0\}$, 或者 P 的大于 0 的元素集合有最小元, 设它为 a.

a 的整数倍群 $a\cdot\mathbb{Z}$ 包含在 P 中; 如果 $P\setminus a\cdot\mathbb{Z}$ 非空, 那么存在 $x\in P$ 和整数 n, 使得 $a(n-1)<x<an$; 因此, 对于 P 的元素 $(an-x)$, 我们将有 $0<(an-x)<a$; 由 a 的选取, 这是不可能的.

这样, 我们有 $P=a\cdot\mathbb{Z}$.

注 1 如果 G 是 $\mathbb{R}$ 的非闭子群, 那么它必定在 $\mathbb{R}$ 中处处稠密; 事实上, 由假设, $\overline{G}$ 是不同于 G 的闭群, 于是它不可能是离散的; 从而只可能是 $\mathbb{R}$.

下面是一个这样的群的例子: 由两个比为无理数的非零数 a 和 b 所生成的元素 $(ap+bq)$ 的群 G.

注 2 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续周期函数, P 为 f 的周期群.

如果 $P=\mathbb{R}$, 那么 f 在 $\mathbb{R}$ 上是常数.

如果 $P=a\cdot\mathbb{Z}$, 那么只要 f 在 $[0,a)$ 上或者在任何形为 $[x_0,x_0+a)$ 或者 $(x_0,x_0+a]$ 上的限制已知, f 也就已知.

周期 a 称为 f 的最小周期.

一致结构[①] **一致连续** 在拓扑群 G 中, 我们不仅可以说一个给定点邻近的各点, 并且可以更一般地谈论一个集合有多小.

事实上, 对于 G 的单位元 e 的任何邻域 V 和任何 G 的子集 A, 我们可以说 A 为 V **阶小**, 意为对于任何 $x,y\in A$, 我们有 $xy^{-1}\in V$.

这个基本事实使我们可引入函数的一致连续的概念; 这一概念在研究距离空间时, 我们将重新在邻域的形式下提出.

定义 14-5 设 X 和 Y 为两个拓扑群; 为了简单起见, 我们假设它们都是交换群; f 为 X 到 Y 的映射. 我们说 f **一致连续**, 是指对于 Y 的零的任何邻域 W, 存在 X 的零的邻域 V, 使得任何 V 阶小的 $A\subset X$, 有 W 阶小的像 $f(A)$.

我们还可把这一条件表述为:

$$((x_1-x_2)\in V)\implies((f(x_1)-f(x_2))\in W).$$

[①]本书始终没有对一般的一致结构提出定义. 需要对一致结构有进一步了解的读者可参见例如, J. L. Kelly, General Topology, Beijing, China: World Pub. Co.; New York: Springer-Verlag, 1955, 1988, 2001. (中译本: 凯莱著, 吴从炘译, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

一般的一致结构不需要拓扑群结构. 拓扑群结构的特点在于每一点的邻域无非是单位元邻域的平移. 因此, 在一点上确定了邻域全体以后, 其他地方的邻域也都确定了. 一致结构无非是把这一点抽象化, 即某个集合的每点上都有 "同样大小" 的 "邻域". 这种 "同样大小" 的 "邻域" 结构就称为该集合的一致结构. 而原来的集合称为一致空间. 最常用的一致空间是后面要讨论的距离空间.

—— 译者注

例 设 G 为交换拓扑群, V 为 G 上的 O 的任意对称邻域.

1° 关系式 $-(a+V)=-a-V=-a+V$ 指出, 任何 V 阶小的集合的在对称映射下的像是 V 阶小的; 因此, G 到 G 的映射 $x\to -x$ 是一致连续的.

2° $G\times G$ 到 G 的映射 $f\colon (x,y)\to(x+y)$ 在点 (O, O) 的连续性导致存在 G 上 O 的邻域 W, 使得 $W+W$[1] $\subset V$.

既然对于任何 $a,b\in G$, G 的满足 $x\in(a+W)$[2] 和 $y\in(b+W)$ 的 $(x+y)$ 的全体包含在 $(a+b)+V$ 中, 故它是 V 阶小的.

因此, 映射 f 是一致连续的.

Z 乘法群 $\mathbb{R}^*$ 的拓扑是加法群 $\mathbb{R}$ 的拓扑在 $\mathbb{R}^*$ 上的迹. 因此, 定义在拓扑群 $\mathbb{R}^*$ 上或者取值在这个群上的连续函数与定义在 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\mathbb{R}^*$ 上或者取值在这个子空间上的连续函数是一回事; 例如 x^{-1} 和 xy 对于 $\mathbb{R}$ 的拓扑在 $\mathbb{R}^*$ 上连续. 但是涉及一致连续性时, 情况完全改变了.

例如, 乘法群 $\mathbb{R}^*$ 到加法群 $\mathbb{R}$ 的恒等映射 $x\to x$ 不是一致连续的; 事实上, 对于 $\mathbb{R}^*$ 中的单位元的任何邻域 W, W 的平移是集合 λW, 而显然在 $\mathbb{R}$ 上不存在 O 的邻域 V, 使得所有这些 λW 是 V 阶小的.

同样, 对于 $\mathbb{R}^*$ 上建立的与它的群结构相应的一致结构, 甚至对由 $\mathbb{R}$ 的一致结构所诱导的一致结构而言, $\mathbb{R}^*$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x\to x^{-1}$ 也不是一致连续的; 这个结论也可推广到映射 $(x,y)\to xy$.

定义 14-6 (拓扑环) *拓扑环 A 是被赋有拓扑的环*[3]*, 对于这个拓扑, 函数 $(-x)$, $(x+y)$ 和 $x\cdot y$ 都是连续的.*

更确切地说, 我们假设 A 到 A 上的映射 $x\to -x$、$A\times A$ 到 A 的映射 $(x,y)\to x+y$ 和 $x\cdot y$ 都是连续的[4].

当这些条件满足时, 我们说 A 上的拓扑与 A 的环结构相容.

特别地, 对于任何拓扑环 A, A 的拓扑与 A 的加法群结构相容.

拓扑环的例子 1° 对于任何环 A, 如果我们对 A 赋以离散拓扑, 我们就得到一个拓扑环, 不过一般它没有多大意义.

2° 设 A 是环, 其上定义了非负实值函数 φ, 且它满足:

$$\varphi(\mathrm{O})=0,\quad \varphi(x)>0,\ \text{当}\ x\neq \mathrm{O},$$

$$\varphi(-x)=\varphi(x);\quad \varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y);$$

[1] 这里 $W+W=\{x+y\,|\,x\in W,y\in W\}$. —— 译者注

[2] 这里 $a+W=\{a+x\,|\,x\in W\}$. —— 译者注

[3] 集合 A 称为环, 是指其上定义了加法和乘法两种代数运算; 对于加法 A 形成交换群, 而对于乘法, 它与加法一起满足分配律: $\forall x,y,z\in A$, $x(y+z)=xy+yz$, $(y+z)x=yx+zx$. —— 译者注

[4] 原文中此段中的 A 都误作 G. —— 译者注

$$\varphi(x \cdot y) \leqslant \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

对于任何 $x, y \in A$, 我们置 $d(x,y) = \varphi(x-y)$. 直接可得 d 是 A 上的距离. 可以验证 A 上的与这个距离相联系的拓扑 (参见第 15, 16 节) 与 A 的环结构是相容的.

特殊情形 a) A 是由 $\varphi(x) = |x|$ 定义的实数环 $\mathbb{R}$.

b) A 是由 $\varphi(f) = \sup|f(x)|$ 的定义在 $[0,1]$ 上的实连续函数环;

c) A 是取复元素的 n 阶方阵环; 如果 a_i^j 是矩阵 $m \in A$ 的元素, 令

$$\varphi(m) = \sum_{i,j} |a_i^j|.$$

d) 设 A 是复系数单变量多项式环. 我们这样取 A 上的拓扑: A 的零元有集合 $V(\varepsilon, n)$ ($\varepsilon > 0$, $n \geqslant 0$ 为整数) 作为邻域基, 其中 $V(\varepsilon, n)$ 表示对于任何 $i \leqslant n$, 满足 $|a_i| \leqslant \varepsilon$ 的多项式 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 全体.

定义 14-7 (拓扑域) 拓扑域 K 是被赋有与 K 的环结构相容的拓扑的域[①], 且对于该拓扑, K^* 到 K 的映射 $x \to x^{-1}$ 是连续的 (其中 K^* 表示 K 中的不同于 0 的元素的全体).

当域 K 上的拓扑满足这些条件时, 我们说它与 K 的域结构相容.

拓扑域的例 1° 被赋有 $\mathbb{R}$ 上的拓扑的实数域 $\mathbb{R}$.

2° $\mathbb{R}$ 的有理数域 $\mathbb{Q}$.

3° 复数域 $\mathbb{C}$, 其上的拓扑是通过对应

$$(a + ib) \to (a, b)$$

由 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑转移到 $\mathbb{C}$ 上而得到.

这个拓扑与 $\mathbb{C}$ 的域结构相容是因为由下列绝对值的性质:

$$|-z| = |z|, \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

我们也可给出更一般的陈述:

4° 设 K 是域, $|x|$ 是定义在 K 上的非负实数函数, 不恒等于 0 或 1, 且具有下列性质:

$$|-x| = |x|, \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|, \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

不难由这些性质得到, $|e| = 1$, 对于 $x \neq \mathrm{O}$, $|x| \neq 0$, 且 $|\mathrm{O}| = 0$.

我们说这样的函数是 K 上的**绝对值**, 置 $d(x,y) = |x-y|$, 我们使它联系了 K 上的一个距离.

初等运算指出, 与这个距离相联系的拓扑是与 K 的拓扑结构相容的.

---

①集合 K 称为域, 是指它首先是环, 同时它的所有非零元素对于乘法形成群. —— 译者注

当 K 是域 $\mathbb{C}$ 时, 与绝对值相联系的拓扑恒同于上面例 3 中定义的拓扑.

四元数域是另一个被赋有由

$$|a+bi+cj+dk|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^{1/2}$$

定义的绝对值的域的例子.

拓扑向量空间 我们将在另一章研究赋范向量空间, 它是拓扑向量空间的重要例子.

III. 距 离 空 间

在拓扑空间中, 邻域的概念用来明确在一点的周围一个集合有多么小, 即所谓集合之小的阶; 由此得出收敛性和连续性的概念.

在拓扑群中, 平移可使这一点做得更好: 一个集合有多么小可通过平移把它与单位元的邻域相比较; 于是我们可谈论函数的一致连续性.

我们将在距离空间 (距离空间的一般定义是 M. Fréchet 给出的) 中重新发现类似的可能性; 然而, 在这类空间中, 两点的靠近程度不再通过参考空间的一个特殊点的邻域来确定, 而是通过依赖这两个点的一个数来确定.

§15. 距离和拟距离

定义 15-1 所谓**距离空间**是由任何集合 E 和 $E\times E$ 到 $\mathbb{R}_+$ 上的映射 $(x,y)\to d(x,y)$ 所组成的二元组, 这一映射具有下列性质:

M_1: $(x=y)\iff(d(x,y)=0)$;

M_2: $d(x,y)=d(y,x)$ (对称性);

M_3: $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ (三角形不等式).

函数 d 称为**距离**, 而 $d(x,y)$ 称为点 x,y 之间的距离.

例 1° 在 $\mathbb{R}$ 中, 映射 $(x,y)\to|x-y|$ 是常用的距离.

2° 更一般地, 设 G 为交换群, $x\to p(x)$ 为 G 到 $\mathbb{R}_+$ 的映射, 满足

$$(p(x)=0)\iff(x=\mathrm{O});\quad p(-x)=p(x);\quad p(x+y)\leqslant p(x)+p(y).$$

如果对于任何 $x,y\in G$, 置 $d(x,y)=p(x-y)$, 直接可得 d 满足公理 $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2$; 另一方面, 关系式

$$(x-y)=(x-z)+(z-y)\quad 导致\quad p(x-y)\leqslant p(x-z)+p(z-y),$$

从而

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y).$$

因此, d 就是 G 上的距离.

3° 设 E 为任意集合, 置

$$d(x,y) = 0 \quad 当 \quad x = y, \qquad d(x,y) = 1 \quad 当 \quad x \neq y.$$

直接可得 d 是 E 上的距离; 有时它可用来方便地构造反例.

Z 注意, 集合 E 上的距离 d 不是定义在 E 上的函数, 而是定义在 E^2 上的函数; 在研究距离的性质时, 必须记住这点.

集合上的拟距离 利用比距离的概念限制较少的拟距离概念, 经常比只研究距离要方便.

定义 15-2 所谓集合 E 上的**拟距离**, 是指任何满足下列条件的 $E \times E$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的映射 f:

E_1: $(x = y) \Longrightarrow (f(x,y) = 0)$;

E_2: $f(x,y) = f(y,x)$;

E_3: $f(x,y) \leqslant f(x,z) + f(z,y)$.

与距离概念仅有的差别在于 f 可取值 $+\infty$ 以及两个不同点可以有零拟距离. 因此, 为了看出拟距离 f 是否为距离, 只需验证任何 $f(x,y)$ 是否有限以及是否有

$$(x \neq y) \Longrightarrow (f(x,y) \neq 0).$$

例 设 α 是 E 到 $\mathbb{R}$ 的映射; 由

$$f(x,y) = |\alpha(x) - \alpha(y)|$$

定义的函数 f 是拟距离.

例如, 当 E 是 $[0,1]$ 上的数值函数的集合且 $a \in [0,1]$ 时, 定义为

$$f_a(x,y) = |x(a) - y(a)|$$

的函数 f_a 是 E 上的拟距离.

拟距离的运算 拟距离的好处在于对它进行最一般的运算, 仍能保持拟距离性; 这一灵活性使它用起来非常方便.

1° 任何拟距离族的和仍是拟距离.

特别地, 任何距离的和仍是距离.

2° 任何拟距离的极限是拟距离.

3° 任何拟距离的上包络是拟距离.

事实上, 设 $f(x,y)=\sup f_i(x,y)$, 其中 f_i 是拟距离. E^2 到 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 的映射 f 显然符合公理 E_1, E_2; 另一方面, 对于任何 i, 有

$$f_i(x,y)\leqslant f_i(x,z)+f_i(z,y)\leqslant f(x,z)+f(z,y),$$

那么

$$f(x,y)\leqslant f(x,z)+f(z,y).$$

因此, f 就是拟距离. 特别地, 如果 f_i 只有有限个, 且都是距离, 则 f 也是距离.

4° 设 α 是集合 E 到被赋有拟距离 f 的集合 F 的映射. 对于任何 $x,y\in E$, 置

$$e(x,y)=f(\alpha(x),\alpha(y)).$$

直接可得 e 是 E 上的拟距离; 我们称它为 f 通过映射 α 的逆像.

5° 我们说 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 到 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 的映射为**规范**, 是指它递增, 且

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y)\ (\text{次可加性}).$$

可以验证, 规范族对下列运算仍保持是规范: 加法, 取简单极限, 上包络, 复合: $(\varphi_1,\varphi_2)\to\varphi_1(\varphi_2)$.

所有满足 $\varphi(0)=0$ 的递增凹函数[①] 是规范; 事实上, φ 的凹性导致:

$$\varphi(u+v)-\varphi(0+v)\leqslant\varphi(u)-\varphi(0),\quad \text{从而}\quad \varphi(u+v)\leqslant\varphi(u)+\varphi(v).$$

特别地, 函数 $x/(1+x)$ 和 $\inf(x,1)$ 是规范.

对于任何规范 φ 和任何集合 E 上的拟距离 f, $\varphi(f)$ 也是 E 上的拟距离: 性质 E_1 和 E_2 是明显的; 另一方面, 对于任何 $x,y,z\in E$, 置

$$a=f(x,y),\quad b=f(x,z),\quad c=f(y,z).$$

关系式 $a\leqslant b+c$ 蕴涵 $\varphi(a)\leqslant\varphi(b+c)\leqslant\varphi(b)+\varphi(c)$.

关系式 $\varphi(a)\leqslant\varphi(b)+\varphi(c)$ 证明了性质 E_3.

6° 更一般地, 我们可以定义 $(\overline{\mathbb{R}}_+)^n$ 上的规范: 定义这个集合的序关系如下: 当对于任何 i, 有 $x_i\leqslant y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时, 就置 $x\leqslant y$, 且对于所有 i 通过 $z_i=x_i+y_i$ 来定义 $z=x+y$.

于是所谓 $(\overline{\mathbb{R}}_+)^n$ 上的**规范**是指该集合到 $(\overline{\mathbb{R}}_+)$ 上的每一个这样的映射 φ, 它递增且满足

$$\varphi(\mathrm{O})=0,\quad \varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y).$$

任何在 $(\overline{\mathbb{R}}_+)^n$ 上递增、凸、一次正齐次函数 φ[②]就是这样的规范; 事实上, 凸性

① 关于凸函数和凹函数的定义和性质参见第二章的第 16 至 18 节. 根据第二章的命题 17-1, 函数 φ 为凹函数的充要条件为 $p(x,y)=\dfrac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}$ 是 x,y 的递减函数. 从而易证 $\varphi(u+v)-\varphi(0+v)\leqslant\varphi(u)-\varphi(0)$. —— 译者注

② φ 是一次正齐次函数是指 φ 满足: $\forall\lambda\in\mathbb{R}_+$, $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$. —— 译者注

给出

$$\varphi((x+y)/2) \leqslant \frac{1}{2}(\varphi(x)+\varphi(y)),$$

而由正齐次性, 又有

$$\varphi(x+y) = 2\varphi((x+y)/2) \leqslant \varphi(x)+\varphi(y).$$

例如, 当 (x_i) 为 x 的坐标时, 函数

$$x \to \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$$

具有这些性质, 因而它是一个规范; 同样, 更一般地,

$$x \to \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} \quad (p \geqslant 1)$$

也都是规范.

$(\overline{\mathbb{R}}_+)^n$ 上的规范可用来方便地产生拟距离: 事实上, 如果 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是集合 E 上的拟距离, φ 是 $(\overline{\mathbb{R}}_+)^n$ 上的规范, 如同 $n=1$ 那样, 可以验证, $\varphi(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是 E 上的拟距离.

例如, $(\sum f_i^2)^{1/2}$ 就是一个拟距离.

拟距离运算的应用 1° **$\mathbb{R}^n$ 的经典距离** 我们以 (x_i) 表示 $\mathbb{R}^n$ 的点 x 的坐标. 对于任何 i, 置

$$d_i(x,y) = |x_i - y_i|;$$

这是 $\mathbb{R}$ 的距离通过映射 $x \to x_i$ 的逆像; 因而它是 $\mathbb{R}^n$ 上的拟距离.

有前所述, 函数

$$d(x,y) = \left(\sum_i (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}, \quad d'(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|, \quad d''(x,y) = \sum_i |x_i - y_i|$$

都是 $\mathbb{R}^n$ 上的拟距离; 由于他们都是有限的, 且仅当 $x=y$ 时才为零, 故它们都是 $\mathbb{R}^n$ 上的距离; 它们中的每一个都对 $\mathbb{R}^n$ 上的平移不变.

可以验证, 这些距离的任意两个的比都是有界的; 更确切地说, 有

$$d' \leqslant d \leqslant d'' \leqslant nd'.$$

2° **距离空间的积** 设 (E_i) 为赋以距离 d_i 的距离空间的有限族.

在 E_i 的积 E 上, 每个函数 $(x,y) \to d_i(x_i, y_i)$ 是拟距离; 因而如同上述例子一样, 函数

$$d(x,y) = \left(\sum_i d_i^2(x_i, y_i)\right)^{1/2}, \quad d'(x,y) = \sup_i d_i(x_i, y_i), \quad d''(x,y) = \sum_i d_i(x_i, y_i)$$

都是 E 上的拟距离; 直接可得这些都是距离, 且它们在下列意义下是可比较的:

$$d' \leqslant d \leqslant d'' \leqslant nd'$$

(其中 n 是 E_i 的个数).

根据不同情况, 我们利用这些距离中的某一个; 第一个距离 d 仅当空间 E_i 为向量空间, 距离 d_i 由纯量积[①]导出时, 才予使用; 我们称它为 Descartes (笛卡尔) 距离或 Euclid (欧几里得) 距离; 被赋有这样距离的空间 $\mathbb{R}^n$ 称为 n 维 Euclid **空间**.

3° 设 E 为距离空间, d 为它的距离.

函数 $d' = d/(1+d)$ 和 $d'' = \inf(d, 1)$ 也是 E 上的距离.

我们有 $d' \leqslant d'' \leqslant 2d'$, 因而这些距离是可比较的. 我们可看出, 它们使 E 有与 d 给出的一样的拓扑和一样的 "一致结构", 而由于它们都小于等于 1, 故经常有其引人注目的方便之处.

4° 设 E 为集合 A 到被赋有距离 d 的距离空间 B 的映射全体.

我们知道, 对于任何 $a \in A$, $d(x(a), y(a))$ 是 E 上的拟距离; 这个拟距离度量了函数 x, y 在点 a 上的接近程度.

更一般地, 对于每个 $X \subset A$, 置:

$$d_X(x, y) = \sup_{a \in X} d(x(a), y(a)).$$

这是 E 上的拟距离, 它度量函数 x, y 在 X 上的接近程度; 特别地, d_A 是 E 上的仅当 $x = y$ 时为零的拟距离: 因此, 如果此外还有 $d \leqslant 1$, 我们也有 $d_A \leqslant 1$, 于是 d_A 是距离.

在研究一致收敛时, 我们将利用这些距离.

现在我们将要引入的大多数概念都可用明显的方式推广到被赋有一个拟距离的集合; 但我们仅当它有用时才把它明确作出.

定义 15-3 (距离空间的距离子空间) *设 E 为由距离 d 定义的距离空间, A 为 E 的子集. 被赋以由 $d_A(x, y) = d(x, y)$ 定义的距离 d_A 的集合 A 称为 E 的距离子空间, 这里 $x, y \in A$.*

换句话说, d_A 是 d 在 E^2 的子集 A^2 上的限制. 这个定义为我们提供了大量的距离空间的例子: 例如, 当 $\mathbb{R}^n$ 被赋以上面定义的距离之一, $\mathbb{R}^n$ 的任何子集就成为 $\mathbb{R}^n$ 的距离子空间.

定义 15-4 (等距映射) *设 E 和 E' 为被赋以距离 d 和 d' 的两个距离空间; $f\colon x \to x'$ 为 E 到 E' 上的双射.*

[①] 有数量积的向量空间称为准 Hilbert 空间, 或内积空间. 其定义参见第三章第 14 节.

—— 译者注

我们说 f 是**等距映射**, 是指对于任何 $x, y \in E$, 有

$$d(x,y) = d'(x',y').$$

这样, 等距映射无非就是对于距离空间结构的同构.

例 1° 在被赋以形为 $d(x,y) = p(x-y)$ 的距离 d 的交换群中, 对称和任何平移都是等距映射.

2° 在被赋以其经典距离之一的空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 任何直线是等距于数直线 $\mathbb{R}$ 的子空间.

3° 可以证明, Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 到自身的保持原点的等距映射无非就是 $\mathbb{R}^n$ 的保持二次型 $\sum x_i^2$ 的线性变换.

定义 15-5 (开球、闭球、球面) 在任何距离空间 E 中, 所谓中心为 a、半径为 ρ ($\rho \geqslant 0$ 或为 $+\infty$, $a \in E$) 的**开球** (相应地, **闭球**), 是指满足 $d(a,x) < \rho$ (相应地, $\leqslant \rho$) 的 E 的点 x 的全体 $B(a,\rho)$.

当 E 是 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 时, 我们经常把球这个词换为**圆盘**.

所谓中心为 a、半径为 $\rho \geqslant 0$ 的**球面**是指满足 $d(a,x) = \rho$ 的 E 的点集 $S(a,\rho)$.

当 E 是 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 时, 我们经常把球面这个词换为**圆周**.

例 被赋以距离 $d'(x,y) = \sup |x_i - y_i|$ 的 $\mathbb{R}^n$ 中, 球 $B(a,\rho)$ 是边平行于坐标轴的立方体.

直接可得, 任何中心为 a 的开球的并仍是开球; 同样, 任何中心为 a 的闭球的交仍是闭球.

这里必须注意, 空间 E 的球和球面一般没有 $\mathbb{R}^n$ 的球和球面的任何几何性质. 为了说明这点, 只需取 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的任意距离子空间.

定义 15-6 (直径、两个集合间的距离) 所谓距离空间 E 的子集 A 的**直径**, 是指距离 $d(x,y)$ 的上确界 $\delta(A)$, 这里 $x, y \in A$.

我们说 A 是**有界集**, 是指它的直径有限.

对于任何集合 X 到距离空间 E 的映射 f, 所谓 f 在 X 的子集 Y 上的**振幅**是指 $f(Y)$ 的直径.

例 1° 平面三角形的直径为它的最长边的长度.

2° 半径为 ρ 的 $\mathbb{R}^n$ 的球的直径为 2ρ; 相反, 在任何直径为 ρ_0 的距离空间中, 任何半径 $\rho > \rho_0$ 的球的直径等于 ρ_0.

直接可得, 距离空间的有界子集无非就是有限半径的球的子集; 两个有界集的并也是有界集; 并且

$$(A \cap B \neq \varnothing) \implies (\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)).$$

定义 15-7 设 A, B 为被赋以距离 d 的距离空间 E 的两个子集. 所谓 A 和 B 之间的**距离** $d(A, B)$ 是指距离 $d(x, y)$ 的下确界, 这里 $x \in A$, $y \in B$.

特别地, 对于任何 $x \in E$, 所谓 x 到 B 的距离 $d(x, B)$ 为

$$d(x, B) = d(\{x\}, B) = \inf_{y \in B} d(x, y).$$

例 1° 在 Euclid 平面上, 点到直线 D 的距离等于该点与它在 D 上的投影间的距离.

2° 在 $\mathbb{R}$ 中, $\mathbb{Q}$ 与 $\complement\mathbb{Q}$ 之间的距离为零.

3° 双曲线的一支到它的渐近线的距离为零.

Z 尽管 $d(A, B)$ 称为 A, B 间的距离, 但它既不是 E 的子集集合的距离, 甚至都不是拟距离, 因为三角形不等式不成立. 例如, 当

$$A = [0, 1], \quad B = [1, 2], \quad C = [2, 3],$$

我们有

$$d(A, B) = d(B, C) = 0,$$

而

$$d(A, C) = 1.$$

§16. 距离空间的拓扑

在被赋以距离空间结构的集合 E 上, 所有可能定义的拓扑中, 有一个拓扑直接与距离相联系, 它称为距离空间 E 的拓扑.

定义 16-1 在距离空间 E 中, 我们说 E 的子集是开集, 是指它或者是空集, 或者对于任何 $x \in A$, 存在中心为 x、半径非零的开球包含在 A 中.

直接可得, E 的开集全体满足拓扑空间的公理 O_1, O_2, O_3; 用这些开集定义的 E 上的拓扑称为距离空间 E 的拓扑.

任何开球 $B(a, \rho)$ 是开集. 这当 $\rho = 0$ 是显然的. 当 $\rho > 0$ 时, 设 $x \in B(a, \rho)$; 于是开球 $B(x, (\rho - d(a, x)))$ 包含在 $B(a, \rho)$ 中, 因为

$$d(x, y) < \rho - d(a, x) \quad \text{导致} \quad d(a, y) \leqslant d(a, x) + d(x, y) < \rho.$$

由此得到, 任何开球的并是开集. 反之, 开集的定义导致任何开集是开球的并. 这样, E 的开集和开球的并是一回事.

命题 16-2 任何距离空间的拓扑是分离的.

事实上, 如果 x 和 y 是 E 的两个不同点, 开球 $B(x,\rho)$ 和 $B(y,\rho)$ (其中 $\rho \leqslant d(x,y)/2$) 就构成 x 和 y 的两个不相交的邻域. □

推论 距离空间 E 的点列 (或更一般地, E 的滤子基) 至多只能有一个极限点.

Z 注意, 集合 E 上的拓扑也可联系 E 上的拟距离 d 用类似于定义 16-1 的方式来定义; 当条件

$$(d(x,y)=0) \implies (x=y)$$

也满足时, 它也是分离的.

更一般地, 对于任何拟距离, 我们可以分离两个满足 $d(x,y)\neq 0$ 的点 x 和 y; 与此相对比的是, 如果 $d(x,y)=0$, 那么任何 x 的邻域包含 y; 反之亦然.

命题 16-3 距离空间的所有点有邻域的一个可数基.

更准确地说, 对于趋向于 0 的大于 0 的所有数列 (ρ_n), 开球或闭球 $B(a,\rho_n)$ 组成 a 的邻域的一个基. 事实上,含有 a 的所有开集包含一个球 $B(a,\rho)$, 这里 $\rho>0$, 于是也包含一个球 $B(a,\rho_n)$; 此外, 所有 $B(a,\rho_n)$ 确实是 a 的一个邻域.

以下是这个性质的几个推论.

命题 16-4 设 E 为距离空间, A 为 E 的子集. 那么

$$(a\in\overline{A}) \iff (d(a,A)=0) \iff (\text{存在 } A \text{ 的收敛于 } a \text{ 的点列 } (x_n)).$$

关系式 $a\in\overline{A}$ 和 $d(a,A)=0$ 都等价于 $A\cap B(a,1/n)$ 对于任何 n 都非空; 因此, 它们相互也等价. 由它们也可导得, 对于任何整数 n, 存在 A 在 $B(a,1/n)$ 中的点 x_n. 点列 (x_n) 显然收敛于 a.

逆命题对于任何拓扑空间都成立.

命题 16-5 设 E 为距离空间, (x_n) 为 E 的点列. 那么

$$(a \text{ 是点列 } (x_n) \text{ 的附着值}) \iff (\text{存在收敛于 } a \text{ 的子列 } (x_{n_i})).$$

证明与上面完全类似.

下面是一个非常有用的命题:

命题 16-6 设 E 为距离空间, A 为 E 的子集, f 为 A 到拓扑空间 F 的映射. 对于任何 $a\in\overline{A}$ 和 $b\in F$, 下列性质等价:

1° 对于 A 的任何趋向于 a 的点列 (x_n), $\lim f(x_n)=b$;

2° $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

证明 我们来证明 1° $\implies$ 2°.

事实上, 如果 $f(x)$ 当 x 趋向于 a 时不趋向于 b, 那么存在 b 的邻域 V, 使得对于任何 a 在 A 中的邻域 v, 有 $f(v) \not\subset V$; 特别地, 存在点 $x_n \in A \cap B(a, 1/n)$, 使得 $f(x_n) \notin V$; 点列 (x_n) 收敛于 a, 而 $f(x_n)$ 不收敛于 b. 这与假设矛盾. □

逆命题 2° $\Longrightarrow$ 1° 在任何拓扑空间中成立.

推论 16-7 距离空间 E 到拓扑空间 F 的映射 f 在点 a 上连续, 等价于对于任何 E 的收敛于 a 的点列 (x_n), 点列 $(f(x_n))$ 收敛于 $f(a)$.

这是上述命题的特殊情形.

推论 16-8 距离空间 E 到拓扑空间 F 的映射 f 在 E 上连续, 等价于 f 在 E 的任何紧集上的限制连续.

正命题是显然的. 反之, 假设 f 在任何紧集上的限制连续; 对于任何 $a \in E$ 和任何趋向于 a 的序列 (x_n), 集合 $\{a, x_1, x_2, \cdots\}$ 是紧集, 故 $f(x_n)$ 趋向于 $f(a)$. 根据上一命题, f 连续.

定义 16-9 (函数在一点上的振幅) 设 f 为拓扑空间 E 到距离空间 F 的映射. 对于任何 $a \in E$, 所谓 f **在点** a **上的振幅**, 是指 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 中这样的元素, 它等于 f 在 a 的邻域 V 上的振幅的下确界; 换句话说, 它等于 $\inf \delta(f(V))$, 其中 V 遍历 $\mathscr{V}_a$.

例如, 可以验证, 这个振幅为零等价于 f 在 a 上连续.

用类似的方式可以定义 f 在使 $a \in \overline{A}$ 的 E 的子集 A 上对于 a 的振幅.

距离和拓扑之间的关系 我们已经对一个集合上的距离联系一种拓扑. 有时, 利用该距离来研究 E 的拓扑性质是很方便的; 例如, 对于 E 的任何点 x, 中心为 x 的诸球组成 x 的邻域基, 由此可导得下列等价性质:

对于 E 的任何点列 (x_n),

$$(\lim x_n = a) \Longleftrightarrow (\lim d(a, x_n) = 0).$$

对于 E 到距离空间 F 的任何映射 f, f 在点 a 上的连续性等价于下列条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \text{使得} \quad (d(a,x) < \eta) \Longrightarrow (d(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

然而, 滥用距离往往会使证明变繁, 并且掩盖了现象的真正起因.

产生这种情况的部分原因在于集合 E 上的许多不同的距离可以联系同一个拓扑; 因此, 这些距离并不是研究这一拓扑的内在的工具.

另一个使距离的应用受到限制的原因在于某些在研究最经典的问题中非常有用的拓扑空间不是**可距的**,[1] 即不能通过距离来定义.

我们将通过某些陈述来明确距离和拓扑之间的关系.

[1] 也可说是 "可度量化" 的.

命题 16-10 设 d 和 d' 为集合 E 上的两个距离.

如果它们同时趋向于零 (意义为对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得 $(d(x,y) < \eta)$ 导致 $(d'(x,y) < \varepsilon)$, 反之亦然), 那么联系 d 和 d' 的拓扑恒同.

事实上, 由假设可得, 被赋有与 d 相联系的拓扑的 E 到被赋有与 d' 相联系的拓扑的 E 上的映射 $x \to x$ 是双方连续的, 因而是同胚.

例 1° 对于 E 上的任何距离 d, E 上联系距离 d, $d/(1+d)$, $\inf(1,d)$ 的拓扑都是相同的.

2° 设 E 是被赋以距离 d_i 的距离空间 E_i 的乘积. E 上的联系距离

$$\left(\sum d_i^2\right)^{1/2}, \qquad \sup d_i, \qquad \sum d_i$$

的拓扑都是恒同的; 事实上, 我们已经知道, 这些距离相互间的比是有界的.

Z 不能错误地认为 "当 E 上的联系两个距离的两个拓扑恒同时, 这两个距离就满足命题 16-10 中用过的典型关系". 例如, 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上, 距离 $|x-y|$ 和 $|1/x-1/y|$ 对 $\mathbb{R}_+^*$ 给出通常的拓扑, 但当 $|x-y|$ 趋向于零时, $|1/x-1/y|$ 并不趋向于零①.

命题 16-11 1° 一个距离空间 E 的任何距离子空间有 E 的拓扑的诱导拓扑作为拓扑.

2° 任何有限个距离空间 E_i 的积距离空间 E 有 E_i 的积拓扑作为拓扑.

证明 1° 这是直接可得的, 因为对于任何 $A \subset E$, A 的开球是 E 的开球在 A 上的迹.

2° 我们已经知道, 三种距离 $(\sum d_i^2)^{1/2}$, $\sup d_i$, $\sum d_i$ 在 E 上定义了同样的拓扑. 例如, 利用第二种距离: 对于任何 E 的点 $a=(a_i)$, 开球 $B(a,\rho)$ 是开球 $B_i(a_i,\rho) \subset E_i$ 的积.

因此, 这些球既对于与 E 的距离相联系的拓扑, 也对于 E_i 的拓扑的积拓扑, 组成 a 的邻域基. □

例 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 至此所用的积拓扑恒同于与 Euclid 距离相联系的拓扑.

§17. 一致连续性

正如在拓扑群的情形中, 谈论一个集合有多么小的可能性使我们可以谈论函数的一致连续性.

---

① 当 $x \neq 0$ 固定时, $|x-y|$ 与 $|1/x-1/y|$ 必定同时趋向于零. 问题在于当 x, y 都可变动时, 例如取 $x=2\varepsilon$, $y=\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$, 于是有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}\right| \to \infty.$$

换句话说, 这两个距离给出的拓扑是一样的, 但给出的一致结构是不一样的. —— 译者注

定义 17-1 我们说距离空间 E 到距离空间 F 的映射 f 是**一致连续的**, 是指对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得 $(d_E(x, y) \leqslant \eta) \Longrightarrow (d_F(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon)$. 一个或许更富启发性的定义是下面这个.

定理 17-2 我们说 f 是一致连续的, 如果对于所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得对于任何 $X \subset E$,

$$(\delta(X) \leqslant \eta) \Longrightarrow (\delta(f(X)) \leqslant \varepsilon),$$

其中 δ 表示 E 中和 F 中的直径.

注 1° 这一定义突出了一致连续和所有点上连续之间的差别.

f 的连续性可表述为:

$$(\forall x \in E)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\colon (d_E(x, y) \leqslant \eta) \Longrightarrow (d_F(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon).$$

一致连续性可表述为:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\colon (d_E(x, y) \leqslant \eta) \Longrightarrow (d_F(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon).$$

在第一种情形下, η 取决于 x 和 ε 的选择; 而在第二种情形下, η 只依赖于 ε 的选择.

这个注就明显地证实: 如果 f 一致连续, 那么它也连续. 但逆命题是错误的; 例如, $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $f : x \to x^2$ 不是一致连续的, 因为对于任何 $\eta > 0$, f 在区间 $[a, a + \eta]$ 上的振幅 $\omega(a)$ 大于等于 $|2a\eta + \eta^2|$, 而这些 $\omega(a)$ 并非与 a 无关地有界.

同样, $(0, 1)$ 到 $(-1, 1)$ 的映射 $f\colon x \to \sin(1/x)$ 不一致连续, 尽管它有界; 事实上, 在每个区间 $(0, \eta)$ 上, f 的振幅等于 2.

相反, 我们将看到, 当 E 紧时, 逆命题亦成立.

2° 对于拓扑群到距离空间或者距离空间到拓扑群的映射, 我们可以相当容易地形成一致连续的概念. 这将是可以用集合上的**一致结构**来表述的一般的一致连续概念的新例子; 而距离空间和拓扑群是有这种一致结构的两个重要例子.

连续模和 Lipschitz 映射 设 φ 为 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 到 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 的递增映射, 它在点 0 上连续, 且满足 $\varphi(0) = 0$; f 为距离空间 E 到距离空间 F 的映射.

我们说 f 有 φ 作为**连续模**, 是指对于任何 $x, y \in E$, 有

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(d(x, y)).$$

由于 $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$, 故 f 一致连续.

反之, 如果 f 一致连续, 那么对于任何 $u \geqslant 0$, 可置

$$\varphi(u) = \sup(d(f(x), f(y))),$$

这里上确界对于所有满足 $d(x,y) \leqslant u$ 的 $x, y \in E$ 来取.

直接可得 φ 是 f 的连续模.

因此, 一致连续的概念可以用连续模来表达.

如果 f 把 E 映射到 F, g 把 F 映射到 G, 并且 f 和 g 分别以 φ 和 γ 作为连续模, 那么映射 $g \circ f$ 有 $\gamma \circ \varphi$ 作为连续模.

在分析中, 最常用的连续模是形为 $u \to ku^\alpha$ $(\alpha > 0)$ 的函数 φ; $\alpha = 1$ 的情形就是所谓 Lipschitz 映射. 更明确的陈述为:

定义 17-3 设 k 为大于 0 的数. 我们说映射 f 是比为 k 的 Lipschitz **映射**, 是指对于任何 $x, y \in E$, 有

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y).$$

当 $k < 1$ 时, 我们说 f 是**压缩映射**或者简称**压缩**.

例 1° 设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 的区间上的可导数值函数. 如果 f 是比为 k 的 Lipschitz 映射, 那么关系式 $|\Delta f/\Delta x| \leqslant k$ 指出 $|f'| \leqslant k$; 反之, 如果 $|f'| \leqslant k$, 那么有限增量定理指出

$$|\Delta f| = |f(x) - f(y)| = |(x-y)f'(z)| \leqslant k|\Delta x|,$$

从而 f 是比为 k 的 Lipschitz 映射.

2° 对于任何距离空间 E_i 的积 E, E 在空间 E_i 上的投影 f_i 是比为 1 的 Lipschitz 映射 (对于 E 上的常用的三种距离中的任意一个).

3° 设 E 为距离空间, d 为它的距离. $E \times E$ 到 $\mathbb{R}$ 上的映射 $(x,y) \to d(x,y)$ 在对 $E \times E$ 的赋以定义为

$$d''((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')$$

的距离 d'' 时, 是比为 1 的 Lipschitz 映射.

事实上, 三角形不等式给出

$$d(x',y') \leqslant d(x',x) + d(x,y) + d(y,y'),$$

而对 $d(x,y)$ 有类似的关系式, 故

$$|d(x',y') - d(x,y)| \leqslant d(x,x') + d(y,y') = d''((x,y),(x',y')).$$

对于另外两个常用距离, 比 1 应该分别换为 $\sqrt{2}$ 和 2.

同样, 对于任何 $a \in E$, 映射 $x \to d(a,x)$ 是比为 1 的 Lipschitz 映射.

由距离的连续性得到, 对于任何 $A \subset E$, 有 $\delta(A) = \delta(\overline{A})$. 由此也推得下列命题:

命题 17-4 对于任何紧集 $A, B \subset E$, 存在 $a \in A$, $b \in B$, 使得 $d(a,b) = d(A,B)$.

证明 函数 d 在紧集 $A \times B$ 上连续, 故它有界, 且在某点 (a,b) 上达到其下确界. 因此, 命题成立.

同样, 也存在点 (a',b'), 在其上达到它的上确界; 特别地, 当 $A = B$ 时, $d(a',b')$ 等于 A 的直径. □

推论 17-5 *如果在 E 中任何闭球是紧集, 那么对于任何 $x \in E$ 和任何 E 的闭集 F, 存在 $y \in F$, 满足 $d(x,y) = d(x,F)$.*

为此只需对两个紧集 $\{x\}$ 和 $F \cap B(x,r)$ 应用命题 17-4, 其中 r 表示任意大于 $d(x,F)$ 的数. □

一致结构的同构 等价距离 我们已经先对拓扑空间定义了同构的概念 (即同胚), 然后也对距离空间定义了同构的概念 (即等距). 我们将看到, 还存在一个中间的概念, 它能表达某种保持集合有多小的特性.

定义 17-6 *设 E, E' 为两个距离空间, f 为 E 到 E' 上的双射. 我们说 f 是 E, E' 的一致结构同构, 是指 f 和 f^{-1} 都是一致连续的.*

如果我们以 d, d' 表示 E, E' 上的距离, 这个定义可直接转述为: 双射 $f: x \to x'$ 是同构, 是指存在两个连续模 φ 和 φ', 使得对于任何 $x, y \in E$, 有

$$d'(x',y') \leqslant \varphi(d(x,y)), \qquad d(x,y) \leqslant \varphi'(d'(x',y')),$$

或者更简洁地说, $d(x,y)$ 和 $d'(x',y')$ 同时趋向于 0.

显然, 两个同构的积仍然是同构.

例 1° 设 f 为**紧距离**空间 E 到紧距离空间 E' 的同胚. 由于 f 和 f^{-1} 是连续的, E, E' 是紧的, 这两个映射都是一致连续的 (参见第 18 节). 因此, f 是 E 和 E' 的一致结构的同构.

2° 相反, $\mathbb{R}$ 到 $(-1,1)$ 的映射 $x \to x/(1+|x|)$ 一致连续, 且这是一个同胚. 但 f^{-1} 不一致连续, 故 f 不是同构.

定义 17-7 *设 d, d' 是集合 E 上的两个距离. 我们说它们是**等价距离**, 是指被赋以距离 d 的 E 到被赋以距离 d' 的 E 上的恒等映射 $x \to x$ 及其逆都是一致连续的.*

这显然是同构的特殊情形; 条件可简单地转述如下: 在命题 16-10 的意义下, $d(x,y)$ 和 $d'(x,y)$ 同时趋向于 0.

例 距离空间的积上的三个常用距离是等价距离.

很明显, 距离空间上的连续和一致连续的概念在用一等价距离来替换原距离时不变.

§18. 紧距离空间

我们将把本节的研究建立在下列基本引理的基础之上.

引理 18-1 设 E 为距离空间, K 为 E 的有下列性质的闭子集: K 的任何无限点列包含收敛子列.

则对于任何覆盖 K 的 E 的开集族 $(\omega_i)_{i\in I}$, 存在数 $\rho>0$, 使得对于任何 $x\in K$, 开球 $B(x,\rho)$ 至少包含在一个 ω_i 中.

证明 总之, 这里要指出, 不仅是 ω_i 覆盖 K, 而且它们在陈述中所明确的意义下, ρ 一致地覆盖 K.

假设不存在这样的 ρ; 于是对于任何整数 n, 存在 K 的点 x_n, 使得 $B(x_n,1/n)$ 不在任何 ω_i 中; 这个点列 (x_n) 有一收敛子列 (x_{n_i}); 设 a 为这个子列的极限.

由于 K 是闭集, 故 a 属于 K. 从而存在包含 a 的族中的开集 ω; 设 $B(a,\lambda)$ 是中心为 a 包含在 ω 中的开球.

根据三角形不等式, 球 $B(x_{n_i},(\lambda-\varepsilon_{n_i}))$ (其中 $\varepsilon_{n_i}=d(a,x_{n_i})$) 包含在 $B(a,\lambda)$ 中, 故更是在 ω 中. 由于当 $n_i\to\infty$ 时, ε_{n_i} 趋向于 0, 只要 n_i 充分大, 球 $B(x_{n_i},1/n_i)$ 就包含在 ω 中, 与假设矛盾.

这一矛盾就证明了引理. □

Z 不能错误地认为, 对于距离空间的任何子集 K, 引理陈述的性质还是成立的. 例如, 当 $E=\mathbb{R}$, $K=(0,1)$, 退化为开集 $(0,1)$ 的族 (ω_i) 就不具有所述性质. 对于 $E=K=(0,1)$, 我们得到一个类似的例子, 并且这里 K 在 E 中是闭集.

这条引理有一些重要的推论, 特别是下面的定理 18-2 和 18-4.

定理 18-2 对于任何距离空间 E, 下列四条性质是等价的:

1° E 是紧的;

2° E 的任何无限点列至少有一个附着点;

3° E 的任何无限点列包含一个收敛子列;

4° E 的任何无限子集至少有一个聚点.

证明

1° $\Longrightarrow$ 2° 根据命题 11-5.

2° $\Longrightarrow$ 3° 根据命题 16-5.

3° $\Longrightarrow$ 4°. 事实上, 如果 A 是 E 的无限子集, 那么存在 A 的**不同**点的无限点列 (x_n); 它包含收敛子列; 如果 x 是子列的极限, x 显然为 A 的聚点.

4° $\Longrightarrow$ 1°. 事实上, 假设 E 的任何无限子集至少有一个聚点.

设 $(\omega_i)_{i\in I}$ 为 E 的开覆盖; 我们将由它选出 E 的有限子覆盖, 从而也就证明了 E 的紧性. □

根据上述引理, 存在数 $\rho > 0$, 使得 E 的任何开球 $B(x,\rho)$ 至少包含在族的一个 ω_i 中.

设 x_1 为 E 的点; 如果 $B(x_1,\rho)$ 不覆盖 E, 那么存在点 x_2 使得 $d(x_1,x_2) \geqslant \rho$. 一般可假设已定义相互间距离大于等于 ρ 的点 $x_1, x_2, \cdots, x_p$. 如果 $B(x_n,\rho)$ $(n = 1, 2, \cdots, p)$ 的并不覆盖 E, 就存在点 x_{p+1}, 使得 x_{p+1} 到 x_n $(n \leqslant p)$ 的距离大于等于 ρ.

x_n 的序列不可能是无限的; 否则这些 x_n 构成一个相互间距离大于等于 ρ 的无限点集, 从而排除了有聚点的可能性, 与假设矛盾.

因此, 存在整数 p, 使得 $B(x_n,\rho)$ $(n \leqslant p)$ 的族覆盖 E; 而它们每一个又包含在一个 ω_i 中; 故这些 ω_i 提供了所求的有限覆盖.

推论 设 X 是距离空间 E 的子集. X 在 E 中相对紧等价于 X 的任何无限点列包含收敛于 E 的点的无限子列.

证明 1° 事实上, 如果 $\overline{X}$ 是紧集, 那么 X 的任何无限点列也是 $\overline{X}$ 的无限点列, 从而它包含在 $\overline{X}$ 中收敛的子列.

2° 反之, 如果所述成立, 我们证明 $\overline{X}$ 是紧集. 设 (x_n) 是 $\overline{X}$ 的点列; 对于任何 n, 存在 $x'_n \in X$ 使得 $d(x_n, x'_n) < 1/n$; 点列 (x'_n) 包含收敛于 E 的点 a 的子列 (x'_{n_i}); 于是点列 (x_{n_i}) 显然也收敛于 a, 故它是 $\overline{X}$ 的附着值, 从而在 $\overline{X}$ 中.

这样, 根据定理 18-2, $\overline{X}$ 是紧集. □

我们不难用序列的聚点或者附着点来陈述一系列等价的准则.

命题 18-3 任何紧距离空间 E 有开球组成的可数基.

证明 事实上, 对于任何整数 n, 开球 $B(x, 1/n)$ 覆盖 E, 故存在这些球的有限族 $\mathscr{F}_n$ 也覆盖 E; 这些有限族的并就是所求的可数基: 事实上, 对于 E 的任何开集 ω 和任何 $x \in \omega$, 存在包含 x 且直径任意小的这个族的元素 B; 所有这种元素 B 中之一 B_x 可包含在 ω 中, 而 ω 显然是这些 B_x 的并. □

推论 任何紧距离空间包含处处稠密可数子集.

事实上, 如果 (B_i) 是我们刚才构造的可数球族, x_i 表示 B_i 的任意点, 那么 x_i 的集合就回答了这一问题. □

定理 18-4 任何紧距离空间 E 到另一距离空间 F 的连续映射 f 是一致连续的.

由于这条定理的重要性, 我们将给出两个证明.

第一个证明 设 $\varepsilon > 0$. 由于 f 连续, 我们可以对任何 $x \in E$, 联系开邻域 ω_x, 使得 f 在 ω_x 上的振幅小于等于 ε.

设 ρ 为根据引理 18-1 得到的联系 ω_x 族的数. 任何 E 的球 $B(y,\rho)$ 至少包含在一个 ω_x 中; 于是在这个球上, f 的振幅小于等于 ε; 这就证明了 f 的一致连续性. □

第二个证明 如果 f 不一致连续, 那么存在数 $\varepsilon > 0$, 使得对于任何整数 $n > 0$, 存在两个点 $x_n, y_n \in E$, 使得

$$d(x_n, y_n) \leqslant 1/n, \qquad d(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon.$$

由序列 (x_n) 可以选出子列 (x_{n_i}) 收敛于 E 的点 a; 由于 $\lim d(x_n, y_n) = 0$, 故序列 (y_{n_i}) 也收敛于 a. 因此, a 的任何邻域 V 包含点对 (x_n, y_n); 但 f 在任何 V 上的振幅至少等于 ε, 故 f 在 a 上不连续. 这就与假设矛盾. □

我们可以推广定理 18-4, 得到略微一般而非常方便的命题如下:

定理 18-5 设 E 为距离空间, K 为包含在 E 中的紧集, f 为 E 到距离空间 F 的映射. 如果 f 在 K 的任何点上连续, 那么 f 在 K 的周围按下列意义下一致连续; 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\rho > 0$, 使得对于任何 $x \in K$, f 在球 $B(x,\rho)$ 上的振幅小于等于 ε.

证明可采用证明 18-4 的一种方式来进行, 例如对于如下定义的开集 ω_x 的族应用引理 18-1: 对于任何 $x \in K$, ω_x 是其上 f 的振幅小于等于 ε 的 E 中的 x 的开邻域.

注意, 在这一命题中, 我们完全没有假定 f 在 K 以外的连续性.

§19. 连通距离空间

对于距离空间, 我们将看到可以把连通性的直观概念表达得更为精确.

定义 19-1 距离空间 E 称为**链锁的**, 是指对于任何 E 的点对 (a,b) 和任何 $\varepsilon > 0$, 存在 E 的有限点列 $a_1, \cdots, a_n$, 满足 $a_1 = a$, $a_n = b$, 且对于任何 $i < n$, 有 $d(a_i, a_{i+1}) \leqslant \varepsilon$; 换句话说, 我们可以用一条步长至多为 ε 的链将 a 和 b 连接起来.

命题 19-2 任何连通距离空间 E 是链锁的.

证明 设 $a \in E$, $E(a,\varepsilon)$ 为 E 的可以用一条步长不超过 ε 的链与 a 相连的 x 的全体. 这个集合非空, 因为它包含 a; 它是开集, 因为如果 $x \in E(a,\varepsilon)$, 那么所有满足 $d(x,y) < \varepsilon$ 的 y 也是 $E(a,\varepsilon)$ 的元素; 它是闭集, 因为如果 x 是 $E(a,\varepsilon)$ 的聚点, 那么存在 $E(a,\varepsilon)$ 的点 y, 满足 $d(x,y) < \varepsilon$.

由于 E 是连通的, 故有 $E(a,\varepsilon) = E$, 换句话说, 我们可以把 E 的任何点 b 用一条步长不超过 ε 的链与 a 相连. 因此, E 是链锁的. □

Z 不能错误地认为: 反之, 任何链锁距离空间是连通的. 例如, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是链锁的, 但并不连通. 相反, 逆命题当 E 紧时是正确的.

命题 19-3 紧距离空间连通等价于它是链锁的.

证明 余下的是证明这一等价性的一部分. 于是设 E 是紧距离空间. 如果它不连通, 那么存在把 E 分为两个非空闭集 E_1 和 E_2 的分划. 由于 E_1 和 E_2 是紧的, 它们的距离 δ 不是零. 我们不能把 E_1 的点和 E_2 的点用步长不超过 $\delta/2$ 的链连接, 否则设 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为这样的链, i 为使 $a_i \in E_2$ 的最小指标; 那么 $a_{i-1} \in E_1$, 并且 $d(a_{i-1}, a_i) < \delta/2$, 与等式

$$d(E_1, E_2) = \delta$$

矛盾. 换句话说, 如果 E 是链锁的, 它也是连通的. □

推论 19-4 $\mathbb{R}$ 的任何紧区间都是连通的.

事实上, 任何区间 $[a, b]$ 是紧的, 且它显然是链锁的 (利用点 $a + n\varepsilon$).

更一般地, 设 E 为 $\mathbb{R}$ 的任意区间, $x_0 \in E$; 对于任何 $x \in E$, 有 $[x_0, x] \subset E$, 故 E 是紧空间 $[x_0, x]$ 的并; 因而它是连通的.

反之, 我们在研究连通拓扑空间时已经看到, $\mathbb{R}$ 的不是区间的子集不是连通的. 总之:

命题 19-5 $\mathbb{R}$ 的仅有的连通集是区间 (开、半开或者闭).

推论 对于连通拓扑空间 E 上的任何连续数值函数 f, 集合 $f(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 的区间.

因此, 当 f 在 E 上又取正值、又取负值时, 它一定在 E 的一个点上取零.

应用 19-6 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 的区间上的严格递增的连续数值函数.

由于 f 是 E 和 $f(E)$ 的序同构, 它也是对于与这些次序相联系的拓扑的同胚. 既然 f 连续, 故 $f(E)$ 是区间; 因此, 在 $f(E)$ 上序拓扑恒同于 $\mathbb{R}$ 的拓扑的诱导拓扑; 对于 E 也一样. 这样, f 是区间 E 和 $f(E)$ 的同胚; 从而反函数 f^{-1} 也是连续的和严格递增的.

当 f 严格递减时, 我们显然有一个类似的结果.

§20. Cauchy 列和完备空间

在研究 $\mathbb{R}$ 时, 我们已经定义了 Cauchy 列的概念, 且指出任何 $\mathbb{R}$ 的 Cauchy 列是收敛的.

Cauchy 列的概念不是拓扑概念, 例如, 序列 $(1/n)$ 是 $(0, +\infty)$ 的 Cauchy 列, 但 $(0, +\infty)$ 到自身上的同胚 $x \to x^{-1}$ 把它变为不是 Cauchy 列的序列 (n).

因此, 我们不能指望定义拓扑空间上的 Cauchy 列的概念.

相反, 我们将看到, 在距离空间中这是不难做到的.

定义 20-1 设 E 为距离空间, (x_n) 为 E 的无限点列. 我们说这个序列是 Cauchy 列, 是指当 p, q 趋向于 $+\infty$ 时, $d(x_p, x_q)$ 趋向于 0; 换句话说, 是指对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在整数 n, 使得对于任何 $p, q \geqslant n$, 有 $d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$.

简记如下:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n, n \in \mathbb{N})\,(\forall p, q \geqslant n):\,(d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon).$$

利用满足 $p \geqslant n$ 的点 x_p 的集合 A_n, 可得到一个可能更有启发性的等价定义:

定义 20-2 我们说 (x_n) 是 Cauchy 列, 是指 $\lim \delta(A_n) = 0$ (其中 $\delta(A_n)$ 表示 A_n 的直径).

Cauchy 列的任何无限子列也是 Cauchy 列. 如果 Cauchy 列的子列收敛于点 x, 那么该 Cauchy 列也收敛于点 x.

例 1° 对于任何距离空间 E, 任何收敛于 E 的点的序列 (x_n) 是 Cauchy 列.

2° 在 $\mathbb{R}$ 的距离子空间 $E = (0, +\infty)$ 中, 序列 $(1/n)$ 是不收敛的 Cauchy 列.

3° 更一般地, 设 E 是距离空间 F 的距离子空间; 对于任何 $x \in \overline{E}$, 存在 E 的收敛于 x 的点列 (x_n); 这个序列是 E 中的 Cauchy 列, 它仅当 $x \in E$ 时在 E 中收敛.

4° 设 E 为 $[0, 1]$ 上的连续数值函数的集合: 对于任何 $f, g \in E$, 置

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$

可以验证, d 恰好是 E 上的距离. 如果置

$$f_n(x) = \inf(n, x^{-\frac{1}{2}}),$$

那么可以验证, f_n 是 E 上的 Cauchy 列.

命题 20-3 设 E, F 为两个距离空间, f 为 E 到 F 的一致连续映射; 那么任何 E 的 Cauchy 列 (x_n) 通过 f 的像是 F 的 Cauchy 列.

事实上, 如果 A_n 和 B_n 分别表示满足 $p \geqslant n$ 的 x_p 和 $f(x_p)$ 的集合, 那么有 $f(A_n) = B_n$; 既然 $\lim \delta(A_n) = 0$, 于是由于 f 一致连续, 我们有 $\lim \delta(B_n) = 0$, 即 $(f(x_n))$ 是 Cauchy 列.

Z 如果 f 仅仅连续, 它还是把任何**收敛的** Cauchy 列变为收敛列, 从而也是 Cauchy 列; 但是上面的例给我们指出, 它可能把某些不收敛的 Cauchy 列变为非 Cauchy 列[①].

---

①这里指在例 2° 中, $E = (0, +\infty)$ 上的同胚映射 $x \to x^{-1}$ 把不收敛的 Cauchy 列 $(1/n)$ 变为非 Cauchy 列 (n).
—— 译者注

推论 如果 f 是 E 和 F 的一致结构的同构, 那么 f 交换 E 和 F 的 Cauchy 列.

特别地, 如果 d 和 d' 是集合 E 上的两个等价的距离, 那么对于联系 d 和 d' 的距离来说, Cauchy 列是一样的. E 的 Cauchy 列的概念因而并不联系 E 的距离结构, 而是联系它的一致结构.

命题 20-4 设 E 为距离空间 E_i 的有限积, (x_n) 为 E 的点列, $(x_{n,i})$ 为其在 E_i 上的投影.

$$((x_n)\text{ 是 }E\text{ 中的 Cauchy 列}) \iff (\forall i, (x_{n,i})\text{ 是 }E_i\text{ 中的 Cauchy 列}).$$

证明 设 d_i 为 E_i 上的距离; 由于 E 上常用的三种距离是等价的, 我们可以在 E 上取这些距离中的任意一个; 我们取

$$d''(x, y) = \sum d_i(x_i, y_i).$$

E 到 E_i 上的投影 $x \to x_i$ 是比为 1 的 Lipschitz 映射, 因而一致连续; 于是如果 (x_n) 是 Cauchy 列, $(x_{n,i})$ 也是.

反之, 如果每个 $(x_{n,i})$ 是 Cauchy 列, 关系式

$$d(x_p, x_q) = \sum_i d(x_{p,i}, x_{q,i})$$

指出 (x_n) 是 Cauchy 列. □

完备空间 在 $\mathbb{R}$ 中, 任何 Cauchy 列收敛; 相反, 上面不少例子指出, 存在一些距离空间, 其上某些 Cauchy 列不收敛. 因此, 这就引导我们去研究那些其上所有 Cauchy 列都收敛的空间.

定义 20-5 我们说距离空间 E 是**完备空间**, 是指 E 的任何 Cauchy 列在 E 上收敛.

例 被赋以通常距离的 $\mathbb{R}$ 是完备的. 相反, $(0,1)$ 和 $\mathbb{Q}$ 是不完备的.

在 22-8 中我们将看到任何距离空间可以通过附加新的点而变得完备.

命题 20-6 设 E 是完备距离空间. 对于 E 的任何满足 $\lim \delta(X_n) = 0$ 的非空闭集递减列 (X_n), 所有 X_n 的交 X 恰好包含一个点.

证明 在每个 X_n 中选取一个任意点 x_n. 如果 $p \geqslant n$, 那么我们有 $X_p \subset X_n$, 因而也有 $x_p \in X_n$.

于是满足 $p \geqslant n$ 的点 x_p 的集合 A_n 包含在 X_n 中; 由此得到 $\lim \delta(A_n) = 0$; 从而序列 (x_n) 是 Cauchy 列. 由于 E 完备, x_n 收敛于点 x.

既然对于固定的 n, x 是属于 X_n 的点 x_{n+p} 的极限, 而 X_n 是闭集, 故有 $x \in X_n$ 对于任何 n 成立, 从而 $x \in X$.

最后, 由于 $\delta(X) \leqslant \delta(X_n)$ 对于任何 n 成立, 我们有 $\delta(X) = 0$. 因此, X 只可能包含一个点. □

Z 我们可能以为, 如果 $\lim \delta(X_n) > 0$, 那么所有 X_n 的交不仅非空, 并且还能包含一个点以上. 其实完全不是这样, 下面的例子说明这个问题.

在完备空间 $\mathbb{R}$ 中, 区间 $[n, +\infty)$ 构成无限直径的闭集的递减列, 然而它们的交是空集.

换句话说, 空间是完备的事实仅对于小集合才显示出来. 我们将通过一条补充命题 20-6 的陈述来进一步证实这一现象.

定义 20-7 *设 E 为距离空间, $\mathscr{B}$ 为 E 上的滤子基. 我们说 $\mathscr{B}$ 为 Cauchy 滤子基, 是指对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $X \in \mathscr{B}$, 使得 $\delta(X) < \varepsilon$.*

例 1 对于任何非空子集的递减列 (A_n), 当 $\lim \delta(A_n) = 0$ 时, A_n 组成 Cauchy 滤子基.

例 2 设 $\mathscr{F}$ 是滤子序集, 即对于任何 $a, b \in \mathscr{F}$, 存在 $c \in \mathscr{F}$, 满足 $a, b \leqslant c$.

我们说 $\mathscr{F}$ 到距离空间 E 的映射 f 满足 Cauchy 条件, 是指由形为 $\{f(x) : a \leqslant x\}$ 的集合组成的 E 上的滤子基是 Cauchy 滤子基.

命题 20-8 *完备距离空间 E 上的任何 Cauchy 滤子基是收敛的.*

证明 设 $\mathscr{B}$ 是 E 上的 Cauchy 滤子基. 对于任何整数 n, 存在 $X_n \in \mathscr{B}$, 使得 $\delta(X_n) < 1/n$. 设 x_n 为 X_n 的任意点.

对于任何 p, q, 有

$$X_p \cap X_q \neq \varnothing, \quad \text{从而} \quad \delta(X_p \cup X_q) < 1/p + 1/q;$$

这样也有

$$d(x_p, x_q) < 1/p + 1/q.$$

序列 (x_n) 因而是 Cauchy 列; 设 x 为它的极限. 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 n, 满足

$$d(x, x_n) < \varepsilon/2, \quad \delta(X_n) < \varepsilon/2.$$

由于 $x_n \in X_n$, 故有 $X_n \subset B(x, \varepsilon)$.

这就是说, $\mathscr{B}$ 收敛于 x. □

例 设 f 为局部紧但非紧的空间 E 上的数值函数. 我们假设, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset E$, 使得 f 在 $\complement K$ 上的振幅小于 ε.

$f(\complement K)$ 于是组成 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 滤子基; 如果这个滤子基收敛于数 l, 我们称它为当 x 趋向于无限时 $f(x)$ 的极限.

下列定理提供了一类重要的完备空间:

定理 20-9 任何紧距离空间是完备的.

证明 利用已经用过的记号, 对于 E 的任何点列 (x_n), 这个点列的附着集为

$$A = \cap \overline{A}_n.$$

如果序列是 Cauchy 列, 那么 $\lim \delta(A_n) = 0$, 从而 $\delta(A) = 0$. 此外, 根据命题 11-5, A 非空; 因此, 它退化为一点; 再根据同样的命题, 序列收敛于这个点. □

注 除了紧距离空间外, 还有其他的完备空间; 其中实直线 $\mathbb{R}$ 就是经典例子. 由于这一空间局部紧, 这会使人以为任何局部紧空间都是完备的, 或者任何完备空间都是局部紧的, 但这两个命题都是不成立的; 例如 $\mathbb{R}$ 的距离子空间 $(0,1)$ 是局部紧的, 但不完备; 此外我们将在第 22 节定义的空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 是完备空间, 但不是局部紧的.

推论 设 E 为距离空间, $a \in E$. 如果任何中心为 a 的 E 的闭球是紧的, 那么 E 是完备的.

事实上, 任何 Cauchy 列是有界的, 故可包含在中心为 a 的某个闭球中; 定理 20-9 指出, 这一序列在球中收敛, 故也在 E 中收敛.①

完备空间与紧空间之间的类似 在上述证明中, 我们可以证明在完备空间和紧空间之间有某种类似. 我面将通过一系列类似于前面对于紧空间建立的定理, 来把它进一步明确. 相反, 我们也将指出若干重要的差别.

定理 20-10 对于任何完备距离空间 E, E 的任何闭子集 A 是完备距离子空间.

事实上, 设 (x_n) 为 A 的点的 Cauchy 列. 这个点列也是 E 的点的 Cauchy 列, 故它收敛于 E 的点 x; 但是序列的点属于 A, 而 A 是闭的, 故也有 $x \in A$. 因此, 序列收敛于 A 的点.

定理 20-11 对于任何距离空间 E, E 的完备距离子空间 A 是闭的.

事实上, 我们可以指出 A 包含它的聚点. 设 x 为这种点. 该点是 A 的序列 (x_n) 的极限. 这一序列是收敛的, 故也是 Cauchy 列; 由假设它收敛于 A 的点. 因此就有 $x \in A$.

推论 对于任何完备距离空间 E, E 的闭子集与 E 的完备子空间是恒同的.

定理 20-12 在任何距离空间 E 中, 两个完备子空间的并是完备的; 任何完备子空间的交是完备的.

1° 设 A 和 B 是 E 的两个完备子空间; (x_n) 为 $(A \cup B)$ 的 Cauchy 列; 这个序列的任何无限子列也是 Cauchy 列. 既然这个序列在集合 A 或 B 上的迹是无限子

①原书此后有一 Z, 但内容与前面的注重复, 故略去. —— 译者注

列, 而集合 A 和 B 是完备的, 故该子列收敛于 A 或 B 的一个点; 序列 (x_n) 因而也收敛于同一点.

2° 如果 $(A_i)_{i\in I}$ 都是完备的, 那么它们中的每一个都在 E 中闭; 因此, 它们的交在 E 中闭, 尤其是在这些完备子空间中的任意一个 A_{i_0} 中闭. 这样, 根据定理 20-10, 这一交是完备空间. □

Z 设 E, F 为两个距离空间, f 为 E 到 F 上的一致连续的满射. 不能错误地认为: 当 E 完备时, F 也必定完备; 甚至在 f 是一致连续的同胚时也不行.

例如, $\mathbb{R}$ 到 $(-1,1)$ 上的映射 $x \to x/(1+|x|)$ 具有这些性质, 但 $(-1,1)$ 并不完备, 尽管 $\mathbb{R}$ 是完备的.

相反, 如果 f 是 E, F 的一致结构的同构, 那么这两个空间就同时为完备或同时为不完备; 特别地, 当 d 和 d' 是同一个集合 E 上的两个等价距离时, 与它们相联系的距离空间就同时为完备或同时为不完备.

更一般地, 设 f 是 E 到 F 上的同胚; 如果 f 一致连续, 且 F 完备, 那么 E 也完备.

定理 20-13 任何完备距离空间的有限积是完备的.

证明 设 E_i 是完备距离空间的有限族. 对于 $E = \prod E_i$ 的任何 Cauchy 列 (x_n), 其在 E_i 上的投影是 Cauchy 列 (命题 20-4); 设 a_i 为它的极限. 于是序列 (x_n) 在 E 上收敛于 $a = (a_i)$ (命题 10-3); 这样, E 完备. □

例 由于 $\mathbb{R}$ 完备, 故 $\mathbb{R}^n$ 也完备. $\mathbb{R}^n$ 的任何闭集也完备.

一致连续函数的延拓 如果 f 表示距离空间 E 到另一个距离空间 F 的连续映射, 那么 f 在任何 $X \subset E$ 上的限制也连续; 反之, 如果我们给出 X 到 F 的连续映射 f, 那么可提出这样的问题: 我们是否可把 f 延拓到 E 上? 即 f 是否是某个 E 到 F 的连续映射在 X 上的限制?

我们只在这里考察这个问题的一种非常有用的特殊情形.

定理 20-14 设 X 为距离空间 E 的处处稠密子集, f 为 X 到完备距离空间 F 的一致连续映射. 那么存在 E 到 F 的唯一的连续映射 g, 使得它在 X 上的限制是 f; 这个映射 g 也是一致连续的.

证明 如果 g 是这样的延拓, 那么对于任何 $a \in E$, 有:

$$g(a) = \lim_{\substack{x\in X\\ x\to a}} f(x).$$

这一关系式一方面指出, 如果 g 存在, 那么它是唯一的; 另一方面, 对于任何 $a \in E$ 提供了 $g(a)$ 可能有的值.

由于 f 一致连续, $f(B(a,\rho))$ 的直径随 ρ 趋向于 0; 因此, 对于任何 $a \in E$, 集合

$f(B(a,\rho))$ 组成 F 的 Cauchy 滤子基, 而由于 F 完备, 这个滤子基收敛 (命题 20-8) 于 F 的一个点, 记它为 $g(a)$.

如果 $a \in X$, 那么有 $f(a) \in f(B(a,\rho))$, $f(a) = g(a)$; 因此, 只要我们指出 g 一致连续, g 就将是所求的 f 的延拓.

由假设, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta = \varphi(\varepsilon) > 0$, 使得对于任何 x, $y \in X$ 满足 $d(x,y) < \eta$, 就有 $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$.

于是设 $a, b \in E$ 满足 $d(a,b) < \eta$, 那么存在两个 X 的点列 (a_n), (b_n) 分别收敛于 a, b, 并且对于任何 n, 满足 $d(a_n, b_n) < \eta$.

因为距离 d 是连续函数, 关系式:

$$g(a) = \lim f(a_n); \quad g(b) = \lim f(b_n); \quad d(f(a_n), f(b_n)) \leqslant \varepsilon$$

导致 $d(g(a), g(b)) \leqslant \varepsilon$.

这样, g 一致连续. 证明甚至还指出, 如果 f 的连续模 φ 连续, 那么它同样也是对于它的延拓 g 的连续模; 特别地, 当 f 是比为 k 的 Lipschitz 映射时, g 也同样是这样的映射.

§21. 逐次逼近法的模式

为了证明一个方程的解的存在, 不管它是数值方程、微分方程、偏微分方程还是积分方程, 以及有时还为了有效地计算这个解, 最强有力的方法是所谓逐次逼近法; 它首先是由 Emile Picard 系统应用的. 在许多情形下, 它可带来一种我们用下列不动点定理来具体化的模式:

定义 21-1 设 f 为集合 E 到自身的映射. 所谓 f 的**不动点**是指所有满足 $x \in E$ 且 $f(x) = x$ 的点.

定理 21-2 (不动点定理) 设 E 为完备距离空间, f 是 E 到自身的压缩. 那么 f 有不动点, 并且它是唯一的.

更确切地说, 对于任何 $x_0 \in E$, 点 x_0 的迭代序列 $x_n = f^n(x_0)$ 收敛于点 a, 而 a 是方程 $x = f(x)$ 的解. 这个解 a 是该方程的唯一解.

证明 我们假设 f 为比为 k 的 Lipschitz 映射, 其中 $k < 1$; 置 $x_1 = f(x_0)$, 以及更一般地置 $x_{n+1} = f(x_n)$. 对于任何 n, 点对 (x_{n-1}, x_n) 变为点对 (x_n, x_{n+1}).

因此, 有

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant kd(x_{n-1}, x_n).$$

由这种形式的前 n 个关系式可得

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k^n d(x_0, x_1),$$

因此

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \sum_{n}^{n+p-1} d(x_i, x_{i+1}) \leqslant d(x_0, x_1) \sum_{n}^{\infty} k^p = d(x_0, x_1) k^n/(1-k).$$

因为 $0 \leqslant k < 1$, 故 x_n 的序列是 Cauchy 列. 设 a 为其极限; 由于 f 连续, $\lim f(x_n) = f(a)$.

关系式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 因而给出极限式: $a = f(a)$.

这个解 a 是方程 $x = f(x)$ 的唯一解, 因为对于该方程的任何解 x, 有:

$$d(x, a) = d(f(x), f(a)) \leqslant kd(x, a),$$

这就导致 $d(x, a) = 0$, 于是 $x = a$.

注意, 所利用的方法构成一种可有效使用的计算程序, 因为通项为 $d(x_n, x_{n+1})$ 的级数比公比为 k 的几何级数收敛得要快. 更确切地说, 我们有

$$d(x_n, a) = \lim_{p\to\infty} d(x_n, x_{n+p}) \leqslant d(x_0, x_1) k^n/(1-k).$$

有时可能收敛得还要更快, 例如当 f 在 a 的邻域上的限制是 $k(V)$ 阶的压缩, 而 $k(V)$ 随着 V 的直径趋向于 0.

Z 1° 任何 E 到自身的压缩映射 f 满足以下所说: 对于任何 $x, y \in E$ $(x \neq y)$, 有 $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$; 但反之不然, 甚至可能当 f 在这一意义下严格缩小距离, 且 E 完备时, f 仍然没有不动点. $\mathbb{R}_+$ 到自身的映射 $x \to (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ 就是一个例子.

2° 当 E 不完备时, E 到 E 的压缩映射可能没有不动点; 例如, $(0, 1]$ 到自身的映射 $x \to x/2$ 没有不动点.

注 21-3 设 f 为完备的 E 到自身的比为 k 的压缩映射; a 为 f 的不动点.

对于任何数 $\rho > 0$,

$$f^n(B(a, \rho)) \subset B(a, k^n \rho).$$

特别地, 如果 E 有界, 那么递减列 $\delta(f^n(E))$ 有极限为 0; 序列 $f^n(x)$ 因而一致趋向于 a.

注 21-4 可能有这样的情况, f 不是压缩, 但 f 的适当的幂 f^p 是压缩; 于是置 $f^p = g$.

对 g 我们可应用定理 21-1. 如果 a 是 g 的不动点, 那么关系式 $g(a) = a$ 给出

$$f(g(a)) = f(a);$$

既然 $f^{p+1} = f(g) = g(f)$, 我们也有

$$g(f(a)) = f(a).$$

因此, $f(a)$ 是 g 的不动点; 这种点的唯一性指出 $f(a)=a$; 换句话说, a 也是 f 的不动点.

对于任何 $x_0\in E$, $g^n(x_0)$ 或 $f^{np}(x_0)$ 收敛于 a; 由于 f 连续, $f^{np+1}(x_0)$ 也收敛于 a, 以及更一般地 $f^{np+i}(x_0)$ (其中 $i\leqslant p$) 也收敛于 a; 因此, $f^n(x_0)$ 的序列也收敛于 a.

例　1° E 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$, f 是比 $k<1$ 的相似 (距离乘上常数因子的变换). f 的不动点 a 称为相似中心.

2° 设 f 是定义在有界闭区间 $E=[a,b]$ 上的可导数值函数, 它的值集也包含在 $[a,b]$ 中, 且 $|f'|\leqslant k$, 其中 $k<1$.

于是 $[a,b]$ 到自身的映射 f 是比为 k 的压缩, 从而定理可应用.

这是求解数值方程的熟知方法.

例如, 设 f 为 $[1,+\infty)$ 到自身的映射 $x\to(x/2+1/x)$; 它是比为 $1/2$ 的压缩, 且其不动点为 $\sqrt{2}$. 由于 $f'(\sqrt{2})=0$, 该程序的收敛特别快.

我们将看到这个定理对隐函数理论和解微分方程上的其他应用; 然而, 对于这些应用, 引入一个参数来使定理 21-2 精确化. 那将更为方便.

定理 21-5　*设 L 是拓扑空间, E 为完备距离空间, f 为 $L\times E$ 到 E 的连续映射, 满足以下所述: 对于任何 $\lambda\in L$, E 到 E 的映射 $x\to f(\lambda,x)$ 是比为 k 的压缩 (其中 $k<1$, 不依赖于 λ).*

如果对于任何 λ, 我们用 a_λ 来表示满足 $x=f(\lambda,x)$ 的 E 的点 x, 那么 L 到 E 的映射 $\lambda\to a_\lambda$ 是连续的.

证明　设 $\lambda_0\in L$; 我们证明映射 $\lambda\to a_\lambda$ 在点 λ_0 上连续.

设 $\varepsilon>0$; 由于 f 连续, 存在 λ_0 的邻域 V, 使得对于任何 $\lambda\in V$, 有

$$d(f(\lambda,a_{\lambda_0}),f(\lambda_0,a_{\lambda_0}))\leqslant\varepsilon.$$

而三角形不等式给出

$$d(a_\lambda,a_{\lambda_0})=d(f(\lambda,a_\lambda),f(\lambda_0,a_{\lambda_0}))$$

$$\leqslant d(f(\lambda,a_\lambda),f(\lambda,a_{\lambda_0}))+d(f(\lambda,a_{\lambda_0}),f(\lambda_0,a_{\lambda_0}))\leqslant kd(a_\lambda,a_{\lambda_0})+\varepsilon.$$

故 $d(a_\lambda,a_{\lambda_0})\leqslant\varepsilon/(1-k)$ 对于任何 $\lambda\in V$ 成立.　□

注　其实我们只利用 f 关于 λ 的偏连续性. 但是注意到这一点并不能减弱假设条件, 因为任何 $L\times E$ 到 E 的映射 f, 如果它关于 λ 偏连续, 而关于 x 它又是比为 k 的 Lipschitz 映射, 那么它在 $L\times E$ 上连续; 这直接可由下列不等式得到:

$$d(f(\lambda,x),f(\lambda_0,x_0))\leqslant d(f(\lambda,x),f(\lambda,x_0))+d(f(\lambda,x_0),f(\lambda_0,x_0))$$

$$\leqslant kd(x,x_0)+d(f(\lambda,x_0),f(\lambda_0,x_0)).$$

最后一个表达式显然当 $x\to x_0$, $\lambda\to\lambda_0$ 时趋向于 0.

§22. 简单收敛和一致收敛

分析中最有用的拓扑空间是函数空间, 即元素为函数的空间. 在这种空间中, 我们可以通过空间的拓扑, 在一种确定的意义下, 谈论一些函数趋向于另一个函数的收敛性. 反之, 当我们希望研究给定的函数集合的某些给定特征时, 对这一集合赋以对研究这种特征适用的拓扑, 往往会有很多方便.

下面是这类情况的几个例子:

设 E 为 $[0,1]$ 上有所有各阶导数的数值函数集合. 这是一个向量空间; 如果我们想研究与这一向量结构有关的性质时, 我们可使 E 的拓扑在一定的意义下与向量空间的结构相容. 特别地, 如果我们寻求一种用距离定义的拓扑, 它应该使对于 E 的平移不变; 因此, 只需定义 E 的元素 O 和任意元素 f 之间的距离; 我们用 $p(f)$ 来记这一距离.

1° 如果我们现在希望表达, 函数 $x\to f(x)$ 在 0 的附近, 是指它对所有 x 都很小, 那么置

$$p(f)=\sup_{x\in E}|f(x)|.$$

2° 如果相反, 我们只想表示, f "平均" 很小, 那么置

$$p(f)=\int_0^1|f(x)|dx,$$

或者为了避免 $f(x)$ 的大值. 置

$$p(f)=\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3° 与此相对照, 我们还可表达 f 不仅处处很小, 并且振荡也不太过分.

根据需要, 可置

$$p(f)=|f(0)|+f\text{ 在 }[0,1]\text{ 上的全变差}^{①}$$

或者

$$p(f)=|f(0)+\sup|f'(x)|.$$

4° 如果我们想表达所有直到 n 的各阶导数都很小, 那么置

$$p(f)=|f(0)+|f'(0)|+\cdots+|f^{(n-1)}(0)|+\sup_x|f^{(n)}(x)|.$$

①全变差的定义参见第 24 节. —— 译者注

在研究赋范空间时, 我们再来仔细回顾这些处理. 目前我们将只简要地研究两种最有用的收敛方式.

简单收敛 设 X 为集合, 其上的拓扑可有可无, Y 是拓扑空间. 设 f 是 X 到 Y 的映射, (f_n) 为 X 到 Y 的映射列.

定义 22-1 *我们说序列 (f_n)* **简单收敛**于 *f, 是指对于任何 $x \in X$, 序列 $(f_n(x))$ 收敛于 $f(x)$.*

例 1° 设 f_n 为 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x \to x^n$. 这个序列简单收敛于如下定义的函数 f:

$$f(x) = 0, \quad 当 \quad x \neq 1; \quad f(1) = 1.$$

2° 设 f_n 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x \to nx/(1+|nx|)$.

这个序列简单收敛于如下定义的函数 f:

$$f(x) = -1, \quad 当 \quad x < 0; \quad f(x) = 1, 当 \quad x > 0; \quad f(0) = 0.$$

3° 设 f_n 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $x \to 1/[1+(x-n)^2]$. 这个序列简单收敛于 $f = 0$.

更一般地谈论函数族的简单收敛也很方便.

定义 22-2 *设 $(f_i)_{i\in I}$ 为 X 到 Y 的映射族; $\mathscr{B}$ 是 I 上的滤子基. 我们说该族沿 $\mathscr{B}$* **简单收敛**于 *f, 是指对于任何 $x \in X$, $f_i(x)$ 沿 $\mathscr{B}$ 收敛于 $f(x)$.*

例 1° 我们可以把上述例子中把整数 n 换为任意数, 而取 $\mathbb{R}$ 上的由区间 $[\alpha, +\infty)$ 组成的滤子基作为 $\mathscr{B}$.

2° 设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的可导数值函数. 用

$$g_\alpha(x) = (f(x+\alpha) - f(x))/\alpha$$

定义的函数族 (g_α) (其中 $\alpha \in \mathbb{R}^*$) 当 α 趋向于 0 时 (换句话说, 沿由 0 在 $\mathbb{R}$ 中的邻域在 $\mathbb{R}^*$ 中的迹所组成的滤子基 $\mathscr{B}$), 简单收敛于导函数 f'.

3° 设 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $f_{p,q}$ 定义为

$$f_{p,q}(x,y) = e^{-px^2-qy^2}, \quad 其中\ p, q \in \mathbb{N}.$$

当 p 和 $q \to +\infty$ 时, 双重序列 $f_{p,q}$ 简单收敛于函数 f, 它满足在原点 $f = 1$, 而在别处则处处为 0.

Z 我们没有利用 X 到 Y 的映射集合上的拓扑, 就已经定义了简单收敛性; 其实在这个集合上就隐蔽着一个称为简单收敛拓扑的拓扑 (参见习题的 107 题), 但我们没有机会明确地利用它.

这里注意到这个拓扑一般不能用距离来定义是有益的. 设 (f_n) 是 $[0,1]$ 上的数值函数列, 它简单收敛于 f; 当每个 f_n 本身是序列 $(f_{n,p})$ 的简单极限时, 可以想像 f

是在 $f_{n,p}$ 中适当选取的函数的序列的简单极限. 直接可得, 当简单收敛拓扑**可距**时, 这是成立的 (参见习题的 67 题); 但一些简单的例子指出, 它一般并不成立; 因此这一拓扑**不可距** (同样参见习题的 107 题).

一致收敛 再设 X 为拓扑可有可无的任意集合, Y 现在假设为**距离空间**; 我们再以 f 和 f_n 表示 X 到 Y 的映射.

定义 22-3 我们说序列 (f_n) 一致收敛于 f, 或者说 f 是 f_n 的一致极限, 是指对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在整数 n_0, 使得对于任何 $n \geqslant n_0$ 和任何 $x \in X$, 有 $d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$.

用同样方式可定义族 (f_i) 沿滤子基 $\mathscr{B}$ 一致收敛于 f; 然而, 当我们定义了一致收敛拓扑后, 这一定义将变为无用.

Z 任何一致收敛于 f 的序列 f_n 也简单收敛于 f, 但在本质上要指出, 反之是不成立的. 下面是若干例子:

1° 设 f_n 是由下列条件定义的 $X = [0,1]$ 上的连续数值函数 (图 3):

$$\text{在 } [0, 1/n] \text{ 上}, \quad f_n(x) = n^2 x(1 - nx).$$
$$\text{在 } [1/n, 1] \text{ 上}, \quad f_n(x) = 0.$$

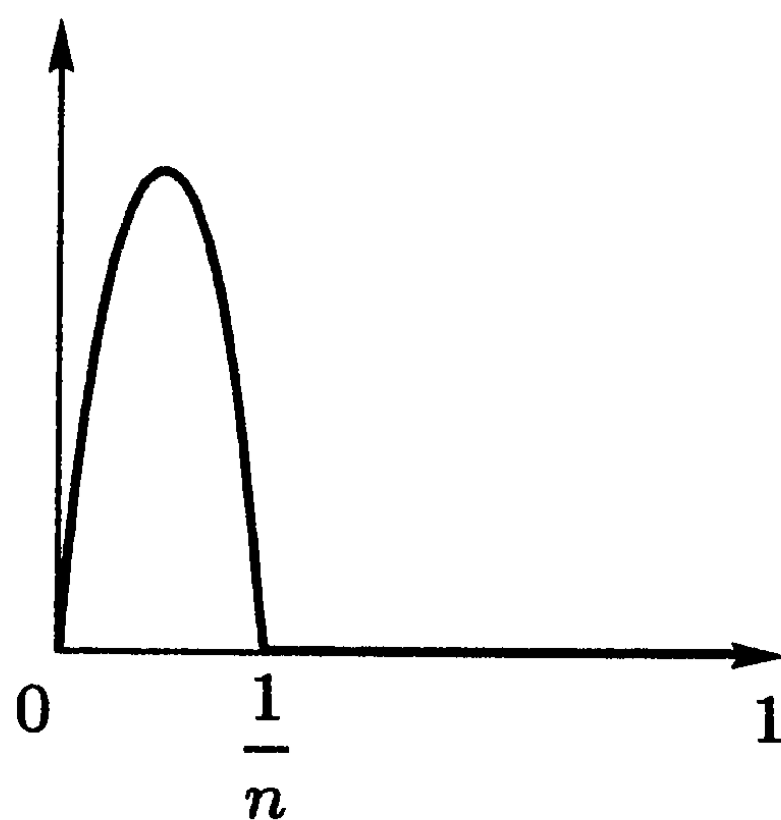


图 3

我们不难验证序列 f_n 简单收敛于函数 $f = 0$, 但这种收敛性不是一致的, 因为

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = n/4,$$

它不但不趋向于 0, 反而趋向于 $+\infty$.

2° 在说明简单收敛的三个例子中, 任何一个都不是一致收敛的; 前两个特别清楚, 因为极限 f 不连续; 第三个例子中, 任何有界区间上序列是一致收敛的, 但在整个 $\mathbb{R}$ 上不一致收敛.

一致收敛的距离和拓扑 一致收敛的研究可以通过在 X 到 Y 的映射集合 $\mathscr{F}(X, Y)$ 上引进拟距离来简化.

设 f, g 是集合 X 到距离空间 Y 的两个映射, 置

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

这是有限数或者 $+\infty$; 根据以前对集合上的拟距离的研究, 对于任何 $x \in X$,

$$d_x(f,g) = d(f(x), g(x))$$

是 $\mathscr{F}(X,Y)$ 上的拟距离, 故

$$d(f,g) = \sup d_x(f,g)$$

也是拟距离. 此外,

$$(f \neq g) \implies (d(f,g) \neq 0).$$

当 Y 有有限直径时, $d(f,g)$ 总是有限的, 故 d 是 $\mathscr{F}(X,Y)$ 上的距离; 当 Y 任意时, 有时用 $\inf(d,1)$ 来代替拟距离 d 较方便; $\inf(d,1)$ 是距离, 且在 $\mathscr{F}(X,Y)$ 上定义了与 d 定义的一样的拓扑和一样的一致结构.

与拟距离 d 相联系的 $\mathscr{F}(X,Y)$ 上的拓扑称为**一致收敛拓扑**, 这一术语的合理性由下列命题可见:

命题 22-4 *X 到 Y 的映射列 (f_n) 一致收敛于 f 等价于: 在被赋以一致收敛拓扑的空间 $\mathscr{F}(X,Y)$ 中点列 f_n 收敛于点 f.*

事实上, 函数列 f_n 一致收敛于 f 等价于: 对于任何 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 有

$$d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon \quad \text{对任何 } x \in X \text{ 成立},$$

这又等价于 $d(f, f_n) \leqslant \varepsilon$.

一致收敛在图像上的解释 利用 X 到 Y 的映射 f 的图像, 可对一致收敛提供一种方便的直观解释:

设 $B(f,\varepsilon)$ 为满足

$$d(y, f(x)) \leqslant \varepsilon$$

的 $X \times Y$ 的点 (x,y) 的集合, 这个集合构成围绕 f 的图像的某种半径为 ε 的**管子**.

$d(f,g) \leqslant \varepsilon$ 等价于

$$d(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon$$

对于任何 $x \in X$ 成立, 或者也等价于 g 的图像包含在 $B(f,\varepsilon)$ 中 (图 4).

说序列 (f_n) 一致收敛于 f, 等于说, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 任何从某个指标起的 f_n, 其图像都在 $B(f,\varepsilon)$ 中. 现在就能很好地看出, 在上面的例 1 中, 为什么 f_n 不一致收敛到 0, 因为对于每个 $\varepsilon < \dfrac{1}{4}$, 任何一个 f_n 的图像都不含于 $B(0,\varepsilon)$ 之中.

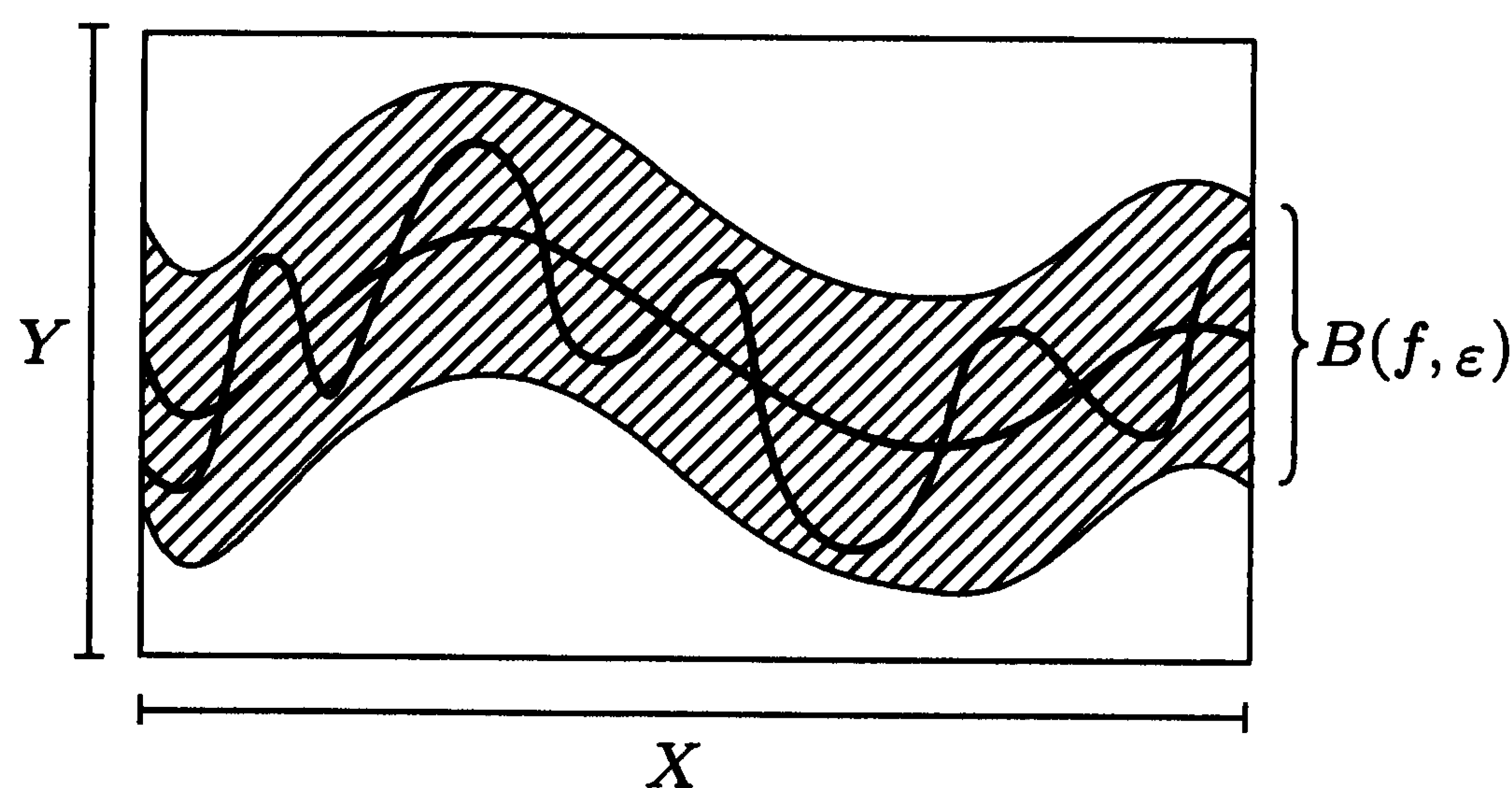


图 4

完备空间的情形 引入 $\mathscr{F}(X,Y)$ 上的拟距离 d 后, 就可谈论函数的 Cauchy 列, 并陈述下列定理:

定理 22-5 当距离空间 Y 完备时, 空间 $\mathscr{F}(X,Y)$ 也完备.

证明 设 (f_n) 为 $\mathscr{F}(X,Y)$ 的 Cauchy 列. 对于任何 $x \in X$, 不等式

$$d(f_p(x), f_q(x)) \leqslant d(f_p, f_q)$$

指出 Y 的点列 $(f_n(x))$ 是 Cauchy 列. 由于 Y 完备, 它具有极限, 记作 $f(x)$.

既然 f_n 是 Cauchy 列, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在整数 $n(\varepsilon)$, 使得对于任何 $p, q \geqslant n(\varepsilon)$ 和任何 $x \in X$, 有

$$d(f_p(x), f_q(x)) \leqslant \varepsilon.$$

如果在这个不等式中让 x 和 p 固定, 而 $q \to \infty$, 那么 $f_q(x)$ 趋向于 $f(x)$. 因此, 我们得到不等式:

$$d(f_p(x), f(x)) \leqslant \varepsilon \quad \text{对于任何 } p \geqslant n(\varepsilon) \text{ 成立}.$$

由这个不等式得到 $d(f_p, f) \leqslant \varepsilon$, 因而序列 f_n 在被赋以拟距离 d 的空间 $\mathscr{F}(X,Y)$ 中收敛于 f.

这样, 这一空间就是完备的. □

推论 22-6 任何距离空间 E 可以完备化; 其意义为存在完备距离空间 $\hat{E}$ 和 E 到 $\hat{E}$ 的子集上的等距 f, 使得 $f(E)$ 在 $\hat{E}$ 中处处稠密.

事实上, 以 f 表示 E 到 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 的映射, 它对于任何 $a \in E$ 联系由 $f_a(x) = \delta(a,x)$ 所定义的 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 的元素 f_a, 这里 δ 表示 E 中的距离.

关系式

$$|\delta(a,x) - \delta(b,x)| \leqslant \delta(a,b) \quad \text{和} \quad |\delta(a,b) - \delta(b,b)| = \delta(a,b)$$

指出, 在 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 中有

$$d(f_a, f_b) = \delta(a,b) \qquad \text{对于任何 } a, b \in E \text{ 成立}.$$

因此, 映射 f 是 E 到 $f(E)$ 上的等距. 所求的空间 $\hat{E}$ 无非是 $f(E)$ 在完备空间 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 上的闭包.

不难验证, E 的完备化在同构意义下是唯一的, 其意义为: 如果有 E 的两个完备化 $(\hat{E},f)$ 和 $(\hat{E}',f')$, 那么 $f(E)$ 到 $f'(E)$ 上的等距 $f'\circ f^{-1}$ 能以唯一的方式延拓为 $\hat{E}$ 到 $\hat{E}'$ 上的等距.

连续性在一致收敛下保持 现在假设 X 为拓扑空间, 而 Y 总是**距离空间**. 于是我们可以谈论 X 到 Y 的映射的连续性. 我们即将看到这个特征在一致收敛下保持.

定理 22-7 设 f_n 为 X 到 Y 的映射列, 它一致收敛于 f, a 为 X 的点. 如果所有 f_n 都在 a 上连续, 那么 f 也在 a 上连续.

证明 给出 $\varepsilon>0$. 由于 f_n 一致连续, 存在整数 n_0 使得

$$d(f(x),f_{n_0}(x))\leqslant\varepsilon\quad \text{对于任何 } x\in V \text{ 成立}.$$

由于 f_{n_0} 在 a 上连续, 故存在 a 的邻域 V 使得

$$d(f_{n_0}(x),f_{n_0}(a))\leqslant\varepsilon\quad \text{对于任何 } x\in V \text{ 成立}.$$

由此得到, 对于任何 $x\in V$, 有

$$d(f(x),f(a))\leqslant d(f(x),f_{n_0}(x))+d(f_{n_0}(x),f_{n_0}(a))+d(f_{n_0}(a),f(a))\leqslant 3\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 这个不等式证明了 f 在 a 上的连续性. □

推论 22-8 如果所有 f_n 都在 X 上连续, 且一致收敛于 f, 那么函数 f 也在 X 上连续.

推论 22-9 设 f_n 为距离空间 X 到距离空间 Y 的连续映射列. 如果对于 X 的任何紧集 K, f_n 在 K 上的限制一致收敛, 那么序列 (f_n) 在 X 上收敛, 且它的极限 f 连续.

这是上一定理和推论 16-8 的直接推论.

我们经常利用这一推论.

Z 定理 22-7 及其推论可直接推广到连续函数族沿滤子基的一致极限.

相反, 这里必须注意, 定理 22-7 不能推广到简单收敛.

当连续函数列简单收敛于函数 f 时, f 具有一定的正则特征, 但它并非总是连续的. 例如单项式 $f_n(x)=x^n$ 的序列在 $[0,1]$ 上简单收敛于这样的函数 f: 它在 $[0,1)$ 上为 0, 而在 $x=1$ 上为 1.

空间 $\mathscr{C}(X,Y)$ 我们将用 $\mathscr{C}(X,Y)$ 表示由拓扑空间 X 到距离空间 Y 的连续映射所组成的 $\mathscr{F}(X,Y)$ 的子空间. 由上一定理可得, $\mathscr{C}(X,Y)$ 是被赋以一致收敛拓扑的 $\mathscr{F}(X,Y)$ 的闭子空间. 当后者完备时, $\mathscr{C}(X,Y)$ 也完备. 因而可以陈述:

定理 22-10 当 Y 完备, $\mathscr{F}(X,Y)$ 上被赋以一致收敛的拟距离时, 由连续映射组成的子空间 $\mathscr{C}(X,Y)$ 也完备.

注 甚至在 X 和 Y 上强加上十分苛刻的正则性假设时, 空间 $\mathscr{C}(X,Y)$ 一般并不紧.

例如, 假设 X 和 Y 是紧的, 且恒等于区间 $[0,1]$. 于是集合 $\mathscr{C}(X,Y)$ 无非就是定义在 $[0,1]$ 上、取值在 $[0,1]$ 中的连续数值函数全体.

在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 上选择适当的距离后, 这个空间是完备的, 但不是紧的, 甚至不是局部紧的. 例如, 这个空间的元素 0 没有任何紧邻域, 因为对于任何 $k>0$, 用 $f_n(x)=k\sin^2 nx$ 定义的序列 (f_n) 不包含任何收敛子序列.

子集集合上的一致收敛 数值函数列 $x\to 1/[1+(x-n)^2]$ 简单收敛于函数 0; 但这一收敛是不一致的. 相反, 对于 $\mathbb{R}$ 的任何区间 $[a,b]$, 这些函数在 $[a,b]$ 上的限制一致收敛于 0.

更一般地, 推论 22-9 指出在任何紧集上一致收敛的意义.

这是下列有普遍重要性的概念的特殊情形.

定义 22-11 设 X 为任意集合, Y 为距离空间, $\mathscr{A}$ 为 X 的子集集合. 我们以 f 和 f_n 表示 X 到 Y 的映射.

我们说, f_n 在任何 $A\in\mathscr{A}$ 上一致收敛于 f, 是指对于任何 $A\in\mathscr{A}$, f_n 在 A 上的限制一致收敛于 f 在 A 上的限制.

例 1° 如果 $\mathscr{A}$ 只有一个元素 X, 那么我们又得到通常的一致收敛.

2° 如果 $\mathscr{A}$ 是 X 退化为一个点的子集全体, 那么我们又得到简单收敛.

3° 如果 $\mathscr{A}$ 是 X 的紧集全体, 那么我们得到在任何紧集上的一致收敛.

一致收敛和简单收敛之间的关系 许多例子向我们指出，函数列的简单收敛性不一定导致它的一致收敛性. 然而, 下面是一种使该命题成立的重要情形:

引理 22-12 设 X 为紧空间, f, f_n (其中 $n=1,2,\cdots$) 为 X 到距离空间 Y 的连续映射.

如果对于任何 $x\in X$, 距离列 $d(f(x),f_n(x))$ 递减且趋向于 0, 那么 f_n 对 f 的收敛是一致的.

事实上, 对于任何 $\varepsilon>0$, 集合 $X_n=\{x\colon d(f(x),f_n(x))\geqslant\varepsilon\}$ 是闭集; X_n 的序列递减, 且它们的交是空集.

因此, 存在 n_0, 使得 $(n\geqslant n_0)$ 导致 $(d(f(x),f_n(x))<\varepsilon)$, 而这就是 f_n 对 f 的一致收敛.

推论 22-13 (Dini 定理) 如果 X 是紧空间, f 和 $f_n\in\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$, 且序列 (f_n) 单调简单收敛于 f, 那么收敛是一致的.

我们应用引理, 并只要注意到序列 $|f(x) - f_n(x)|$ 递减趋向于 0.

Z 这里是序列 f_n 单调, 而并非每个 f_n 单调; 此外, 这后一种理解仅当 X 被赋有序时才有意义, 例如当 $X = [0,1]$.

然而, 这种混淆却不会导致错误; 事实上, 可以验证, 当区间 $[a,b]$ 上的某个单调数值函数列 (f_n) 简单收敛于一个连续函数时, 收敛是一致的 (参见习题的 85 题).

§23. 等度连续函数空间

尽管完备空间有前面一些定理体现出来的明显的好处, 但是能够拥有紧函数空间的事还是颇为可贵的. **等度连续**的概念为我们提供了一个重要的类.

定义 23-1 设 X 是拓扑空间, Y 是距离空间, E 为 $\mathscr{F}(X,Y)$ 的子集.

1° 设 $a \in X$. 我们说 E **在点** a **上等度连续**, 是指对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 a 的邻域 V, 使得对于任何 $f \in E$, 有

$$\delta(f(V)) < \varepsilon.$$

2° 同时, 当 E 是距离空间时, 我们说 E 是**一致等度连续** (或**同等连续**) 的, 是指对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得对于任何 $f \in E$,

$$(d(x,y) < \eta) \Longrightarrow (d(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

E 是一致等度连续, 这种说法显然等价于以下说法: E 的所有 f 有公共连续模 φ.

如果 E 一致等度连续, 那么它不仅等度连续, 并且任何 $f \in E$ 是一致连续的.

例 23-2 1° 如果 f 表示 X 到 Y 的连续映射, 那么集合 $\{f\}$ 处处等度连续, 但仅当 f 一致连续时它才一致等度连续.

2° 设 E 为 $[0,1]$ 到自身的映射 $x \to x^n$ 的集合. 每个 f 一致连续, E 在 $[0,1]$ 的任何点上都连续, 但 E 不是一致等度连续的.

3° 如果 X 和 Y 是距离空间, X 到 Y 的比为 k 的 Lipschitz 映射集合 E_k (其中 $k > 0$) 是一致等度连续的.

4° 设 X, I 为两个紧距离空间, f 为 $X \times I$ 到距离空间 Y 的连续映射. X 到 Y 的偏映射 $f_i\colon x \to f(x,i)$ 的集合 E 是一致等度连续的. 这是 f 在 $X \times I$ 上的一致连续的直接推论.

命题 23-3 设 X 为紧距离空间, Y 为距离空间. 那么 $\mathscr{F}(X,Y)$ 的任何等度连续子集是一致等度连续的.

证明 设 $\varepsilon > 0$; 如果 E 等度连续, 那么对于任何 $x \in X$, 存在含 x 的开集 ω_x, 使得对于任何 $f \in E$, $\delta(f(\omega_x)) < \varepsilon$. 根据引理 18-1, 于是存在数 $\rho > 0$, 使得 X

中任何半径为 ρ 的开球包含在这些 ω_x 的一个之中; 换句话说, $(d(x,y)<\rho)$ 导致 $d(f(x),f(y))<\varepsilon$. □

一致等度连续性的解释 23-4

E 是函数的一致等度连续集等价于对所有 $f\in E$ 存在公共的连续模 φ.

于是设任意 $\alpha>0$, A 为 X 的 α 稠密子集, 其意义为对于任何 $x\in X$, 有 $d(x,A)<\alpha$. 对于任何 $f\in E$, 关系式

$$(d(x_1,x_2)\leqslant\alpha)\Longrightarrow\big(d(f(x_1),f(x_2))\leqslant\varphi(\alpha)\big)$$

因此, 对 f 在 A 上的限制的了解就可导致对 f 在 X 上的至多相差 $\varphi(\alpha)$ 的了解.

换句话说, E 的函数 f 有某种用它们的连续模来度量的 “刚性”.

例如, 对 $[0,1]$ 上的比为 k 的 Lipschitz 数值函数 f 而言, 只要 $f(1/n)$, $f(2/n),\cdots,f(p/n),\cdots$ 已知, 就处处在相差 k/n 的意义下已知.

一致等度连续性的所有推论都起源于这种 “刚性”.

定理 23-5 (Ascoli 定理) 设 X 和 Y 为两个紧距离空间, E 为被赋以一致收敛拓扑的空间 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的子集.

E 一致等度连续等价于 E 在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中相对紧.

证明 1° 设 E 一致等度连续; 为了指出 $\overline{E}$ 是紧的, 根据定理 18-2 的推论, 只需证明 E 的元素的任何无限序列 S 包含在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中收敛的子列; 由于 $\mathscr{C}(X,Y)$ 完备 (因为 Y 完备), 甚至只需指出 S 包含 Cauchy 子列.

设 φ 为所有 $f\in E$ 的公共连续模. 对于任何 $\varepsilon>0$, 存在由半径为 ε 和中心为 x_i $(i=1,\cdots,n)$ 的开球所组成的 X 的有限覆盖.

由于 Y 紧, 在 S 中可选出子列 $S_1(\varepsilon)$, 使得对于任何 f 和 $g\in S_1(\varepsilon)$, 有

$$d_Y(f(x),g(x))\leqslant\varphi(\varepsilon)\quad \text{在点 } x=x_1 \text{ 上成立.} \tag{1}$$

由这一序列 $S_1(\varepsilon)$, 我们又可以选出在点 x_2 上具有同样性质的序列 $S_2(\varepsilon)$; 以后依此类推. 直到 n 次操作后, 我们就构造了一个对每个点 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 满足不等式 (1) 的子列 $S_n(\varepsilon)$; 我们把它表示为 $S(\varepsilon)$.

由构造方法, 对于任何 $x\in X$, 存在点 x_i, 使得

$$d_X(x,x_i)\leqslant\varepsilon,$$

这就导致

$$d_Y(f(x),f(x_i))\leqslant\varphi(\varepsilon)$$

对于任何 $f\in S$ 成立.

对于任何 $f, g \in S(\varepsilon)$, 因而有

$$d_Y(f(x), g(x)) \leqslant d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), g(x_i)) + d_Y(g(x_i), g(x)) \leqslant 3\varphi(\varepsilon).$$

换句话说, 有

$$d(f, g) \leqslant 3\varphi(\varepsilon). \tag{2}$$

这样, 我们就明确给出了一种程序, 它使任何序列 S 联系一个子列 $S(\varepsilon)$, 后者的任意两个元素 f, g 都满足关系式 (2).

对于 ε 依次给定值为 $(1, 1/2, \cdots, 1/n, \cdots)$, 只需重复上述程序, 就可得到逐次的序列:

$$S, S(1), S(1, 1/2), \cdots, S(1, 1/2, \cdots, 1/n), \cdots$$

其中每一个都是前一个的子列.

由于 $\varphi(1/n)$ 有极限为 0, 这个序列的对角线列是 Cauchy 列①. 这就是所求的序列.

2° 设 E 为 $\mathscr{C}(X, Y)$ 的紧子集.

对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 E 的点的有限序列 $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, 使得开球 $B(f_i, \varepsilon)$ 构成 E 的开覆盖. 对于每个 f_i, 存在 $\eta_i > 0$, 使得不等式

$$d_X(x_1, x_2) < \eta_i$$

导致

$$d_Y(f_i(x_1), f_i(x_2)) < \varepsilon.$$

设 η 为这些 η_i 中最小的数; 对于任何 $f \in E$, 注意到 f 属于某个 $B(f_i, \varepsilon)$, 从而就有:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant 3\varepsilon,$$

其中只需

$$d_X(x_1, x_2) \leqslant \eta.$$

换句话说, E 是一致等度连续的. □

Z 定理 23-5 不能推广到 X 或者 Y 是局部紧而非紧的情形.

例如, $[0, 1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的常数映射的集合 E 显然是一致等度连续的; 然而, 它不是相对紧的.

同样 $\mathbb{R}$ 到 $[0, 1]$ 的映射 $x \to 1/[1 + (x - n)^2]$ 的集合是一致等度连续的, 但它不是相对紧的.

---

①我们曾经提到过, 本书总是避免利用选择公理. 但是这里用了 Cantor 对角线方法, 它需要承认选择公理或较弱的可数选择公理. 这对 Ascoli 定理来说是本质的. ——译者注

例 区间 $[0,1]$ 到区间 $[a,b]$ 的比为 k 的 Lipschitz 映射集合对于一致收敛拓扑是紧的.

注 23-6 更一般地, 如果 X 是紧距离空间, Y 是任意距离空间, E 是被赋以一致距离的 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的子集, 那么 E 是相对紧的等价于 E 一致等度连续以及 $\bigcup_{f\in E} f(X)$ 相对紧, 即 E 的 f 在 Y 的同一个紧集中取值. 这一等价性是 Ascoli 定理的一个容易的推论.

§24. 全变差和长度

直到现在为止, 我们所研究的诸如连续、一致连续、一致收敛等概念都没有度量特征, 即使当利用一种距离研究它们更为方便时, 也是如此.

相反, 我们即将定义的全变差则表现出本质上是一种度量特征.

设 T 为全序集 (它将起着参数集的作用), f 为 T 到距离空间 E 的映射; 为了简化记号, 我们将以 $|xy|$ 来表示 E 的两点 x,y 的距离.

定义 24-1 对于任何 T 的有限集 σ, 所谓 f 在 σ 上的全变差, 是指下列数:

$$V_\sigma = \sum_i |f(t_i)f(t_{i+1})|,$$

其中 t_i $(t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$ 表示 σ 的点.

三角形不等式立即指出 $(\sigma \subset \sigma') \Longrightarrow (V_\sigma \leqslant V_{\sigma'})$; 换句话说, V_σ 是 σ 的递增函数. 于是自然可提出下列定义:

定义 24-2 对于任何 $A \subset T$, 所谓 f 在 A 上的**全变差**, 是指有限或无限非负数, 它定义为:

$$V_A = \sup V_\sigma \quad (\text{对于所有有限 } \sigma \subset A).$$

当 $V_A < \infty$, 我们说, f 在 A 上**有界变差**.

显然 V_A 是 A 的递增函数.

特别地, 如果 T 有第一个点 α 和最后一个点 β, 那么有

$$V_T \geqslant V_{(\alpha,\beta)} \quad \text{或} \quad V_T \geqslant |f(\alpha)f(\beta)|.$$

例 1° 设 f 为 T 到 $\mathbb{R}$ 的**递增**映射.

关系式

$$V_\sigma = \sum (f(t_{i+1}) - f(t_i)) = f(t_n) - f(t_1)$$

指出, 如果 T 有第一个点 α 和最后一个点 β, 那么

$$V_T = f(\beta) - f(\alpha).$$

如果 f 递减, 那么

$$V_T = |f(\beta) - f(\alpha)|.$$

2° 设 f 为 $\mathbb{R}$ 的区间 $[a,b]$ 到距离空间 E 的比为 k 的 Lipschitz 映射. 对于任何 $\sigma = \{t_i\} \subset [a,b]$, 我们有

$$V_\sigma \leqslant k\sum(t_{i+1} - t_i) \leqslant k(b-a).$$

因此,

$$V_{[a,b]} \leqslant k(b-a).$$

命题 24-3 全变差在下列意义下是可加的: 对于任何 $x \in T$, 如果置

$$T_1 = ((-\infty, x]) \cap T \quad 和 \quad T_2 = ([x, +\infty)) \cap T,$$

那么有

$$V_T = V_{T_1} + V_{T_2}.$$

事实上, 由于 V_σ 是 σ 的递增函数, 我们也有

$$V_T = \sup V_\sigma, \quad 对于所有含\ x\ 的有限\ \sigma\ 成立.$$

既然一个这样的有限的 σ 无非就是某个 T_1 的含 x 的 σ_1 和某个 T_2 的含 x 的 σ_2 的并, 从而

$$V_\sigma = V_{\sigma_1} + V_{\sigma_2};$$

因此, 我们有

$$V_T = \sup V_\sigma = \sup(V_{\sigma_1} + V_{\sigma_2}) = \sup V_{\sigma_1} + \sup V_{\sigma_2} = V_{T_1} + V_{T_2}.$$ □

定义 24-4 设 T, T' 为两个全序集, f, f' 为 T, T' 各自到 E 的两个映射. 我们说 f, f' 是等价的, 是指存在 T' 到 T 上的递增双射 φ, 使得 $f' = f \circ \varphi$.

这样的关系显然是自反的、对称的和传递的, 因而是等价关系.

命题 24-5 如果 f 和 f' 等价, 那么 f 和 f' 分别在 T 和 T' 上的全变差 V 和 V' 相等.

事实上, 对于任何 $x', y' \in T'$, 有

$$|f'(x')f'(y')| = |f(\varphi(x'))f(\varphi(y'))|;$$

因而对于任何 $\sigma' \subset T'$, f' 在 σ' 上的全变差等于 f 在 $\sigma = \varphi(\sigma')$ 上的全变差.

由此得到 $V' \leqslant V$; 同理可证 $V \leqslant V'$, 故等式成立.

参数化曲线 今后我们将只考虑 T 是 $\mathbb{R}$ 的区间 $[a,b]$ 和 f 是连续的情形; 在这种情形下, 我们说, 二元组 (T,f) 是**参数化曲线或路径**, 并称 V_T 为这一曲线的**长度**; 当这一长度有限时, 我们说曲线是**可度长的**.

对于 T 的任何有限子集 σ, 设

$$\sigma=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\},\quad \text{其中}\quad a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

我们称数

$$\mu(\sigma)=\sup_i|t_{i+1}-t_i|$$

为 σ 的**模**.

定理 24-6 对于任何参数化曲线 (T,f), V_T 是 V_σ 当模 $\mu(\sigma)$ 趋向于 0 时的极限.

换句话说 (为固定思路, 假设 $V_T<\infty$), 对于任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得

$$(\mu(\sigma)<\eta)\Longrightarrow(V_T-V_\sigma<\varepsilon).$$

有时我们把这条定理说成是: 曲线的长度是曲线上的**内接多边形**长度的极限, 这里是指把任何二元组 (σ,f) 称为内接多边形, 其中 T 的有限子集 σ 包含 a 和 b.

证明 我们假设 $V_T<\infty$; 当 $V_T=\infty$ 时, 证明完全类似.

对于任意 $\varepsilon>0$, 根据 V_T 的定义, 存在有限集 $\sigma_0=\{t_1,t_2,\cdots,t_{n_0}\}$, 使得

$$V_T-V_{\sigma_0}\leqslant\varepsilon.$$

由于 f 在 T 上一致连续, 存在一个数 $\eta>0$, 使得只要 $|u-v|<\eta$, 就有

$$|f(u)f(v)|<\varepsilon/n_0;$$

此外还假定 η 小于与 σ_0 关联的诸区间 $[t_i,t_{i+1}]$ 的最小长度.

现在设 σ 是 T 的模 $\mu(\sigma)<\eta$ 的任意有限子集. σ_0 的每个区间 $[t_i,t_{i+1}]$ 至少包含 σ 的一个异于 t_i 和 t_{i+1} 的点; 用 t_i' (相应地, t_i'') 表示 σ 的满足条件 $t<t_i$ (相应地, $t>t_i$) 的点 t 中的最大 (相应地, 最小) 者 (图 5); 令

$$f(t_i)=m_i;\quad f(t_i')=m_i';\quad f(t_i'')=m_i''.$$

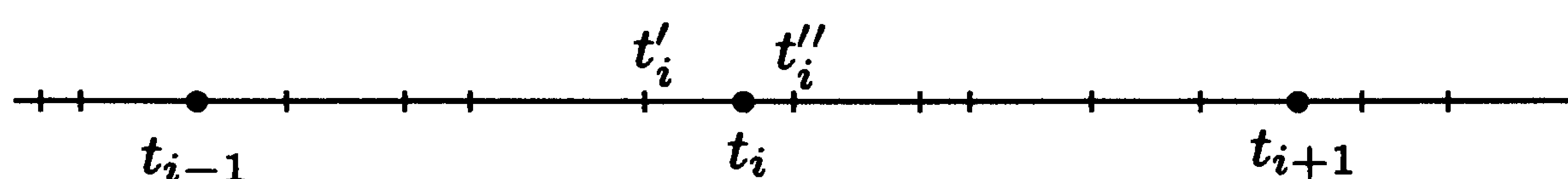


图 5

则有

$$V_{\sigma\cup\sigma_0}-V_\sigma\leqslant\sum_i|m_i'm_i|+|m_im_i''|-|m_i'm_i''|\leqslant\sum_i|m_i'm_i|+|m_im_i''|$$
$$\leqslant 2(\varepsilon/n_0)n_0=2\varepsilon.$$

把关系式

$$V_T-V_{\sigma_0}\leqslant\varepsilon$$
$$V_{\sigma_0}\leqslant V_{\sigma\cup\sigma_0}$$
$$V_{\sigma\cup\sigma_0}-V_\sigma\leqslant 2\varepsilon$$

两边相加得到

$$V_T-V_\sigma\leqslant 3\varepsilon;$$

这就是要找的不等式, 只不过 ε 换成了 3ε. □

推论 24-7 如果 $V_T<\infty$, 那么从 T 到 $\mathbb{R}$ 内的映射 $t\longrightarrow V_{[a,t]}$ 是递增的和连续的.

证明 给定 $\varepsilon>0$; 那么存在 $\eta>0$, 使得

$$(\mu(\sigma)<\eta)\Longrightarrow(V_T-V\sigma<\varepsilon)$$

以及

$$(|y-x|<\eta)\Longrightarrow(|f(x)f(y)|<\varepsilon).$$

现在设 x 和 y 是 $[a,b]$ 中满足 $0\leqslant y-x\leqslant\eta$ 的任意两个点.

存在一个 σ, 它含有 x 和 y, 但不含有 $[x,y]$ 的任何其他点, 并且其模 $\mu(\sigma)<\eta$; 用 σ_1 和 σ_2 分别表示 σ 跟 $[a,x]$ 和 $[y,b]$ 的交集.

关系式 $V_T<V_\sigma+\varepsilon$ 改写为

$$V_{[a,x]}+V_{[x,y]}+V_{[y,b]}=V_{[a,b]}\leqslant V_\sigma+\varepsilon=V_{\sigma_1}+|f(x)f(y)|+V_{\sigma_2}+\varepsilon$$
$$\leqslant V_{[a,x]}+\varepsilon+V_{[y,b]}+\varepsilon.$$

于是对于所有满足 $|y-x|<\eta$ 的 x 和 y, 有

$$V_{[x,y]}<2\varepsilon.$$ □

以下的陈述涉及赋范空间 (参见第二章 15-3 和 15-4),① 不过显然可以假定 E 就是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$.

①原书此处为 “参见第六章 15-3 和 15-4”. ——译者注

推论 24-8 如果 E 是赋范空间, 并且映射 f 有一个连续导数, 则

$$V_T = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

证明 给定 $\varepsilon > 0$; 由于 f' 一致连续, 存在 $\eta > 0$, 使得只要 $0 < v - u < \eta$, 就有 $\|f'(v) - f'(u)\| < \varepsilon$; 第二章命题 15-7 表明

$$\|f(v) - f(u) - (v-u)f'(u)\| \leqslant \varepsilon(v-u). \tag{1}$$

现在设有限子集 $\sigma \subset T$; 存在另一个有限的 σ' 满足 $\sigma \subset \sigma'$, 使得 σ' 的相继两个点 t_i, t_{i+1} 满足 $t_{i+1} - t_i < \eta$, 并且

$$\sum_i (t_{i+1} - t_i)\|f'(t_i)\|$$

与

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt$$

相差小于 ε.

关系式 (1) 应用到点对 (t_i, t_{i+1}) 上, 并且利用三角形不等式, 求和之后给出

$$\left|\sum \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| - \sum (t_{i+1} - t_i)\|f'(t_i)\|\right| \leqslant \varepsilon(b-a). \tag{2}$$

由此得到

$$\left|V_{\sigma'} - \int_a^b \|f'(t)\| dt\right| \leqslant \varepsilon(b-a) + \varepsilon. \tag{3}$$

而 $V_\sigma \leqslant V_{\sigma'}$, 从而

$$V_T = \sup V_\sigma = \sup V_{\sigma'}.$$

关系式 (3) 就证明了推论所断言的等式. □

特殊情形 如果 E 是被赋以 Euclid 范数的空间 $\mathbb{R}^n$, 用 f_p 表示 f 的坐标映射, 推论的等式就变成

$$V_T = \int_a^b \left(\sum f_p'^2(t)\right)^{1/2} dt.$$

乘积空间的参数化曲线 设 E_i 组成距离空间的一个有限族, E_i 上的距离是 d_i, 而 d 是 E_i 的乘积空间 E 上的任何一个常用距离.

设 $f = (f_i)$ 是从 $[a, b]$ 到 E 内的一个映射; 而 V (对应地, V_i) 是 f (对应地, f_i) 的全变差.

从不等式

$$d_i(x_i, y_i) \leqslant d(x, y) \leqslant \sum d_i(x_i, y_i)$$

得到一个对在 $[a,b]$ 的所有有限子集 σ 上的变差成立的类似不等式, 继而有

$$V_i \leqslant V \leqslant \sum V_i.$$

特别是我们可陈述:

命题 24-9 说距离空间的有限乘积空间的参数化曲线是可求长的, 等价于说它在每个因子空间上的投影是可求长的.

例 1° 设 Γ 是由从 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 内的一个连续映射 $f=(f_i)$ 定义的 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的曲线; 说 Γ 是可求长的, 等价于说每个 f_i 是有界变差的.

2° 设 Γ 是从 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 内的一个连续映射 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上的图像; 这里可以把图像 Γ 等同于曲线 $x \longrightarrow (x, f(x))$. 于是当 f 是有界变差的时候, 这个图像有一个有限长度.

Z 必须注意 f 的全变差 V (或者与 f 关联的 $\mathbb{R}$ 中的路径的长度) 决不等于 f 图像的长度; 后者是区间 $(V, V+b-a]$ 中的一个元素.

有界变差的数值函数 前面的例子表明有界变差的数值函数的重要性. 我们由此也对它们进行简要的研究. 更准确地说, 我们将研究在 $[a,b]$ 上有界变差的有限数值函数的集合 $\mathscr{V}$ 的结构.

对于所有 $f \in \mathscr{V}$, 我们以 $V(f)$ 表示 f 在 $[a,b]$ 上的全变差.

命题 24-10 1° $\mathscr{V}$ 是一个向量空间, 并且 V 是 $\mathscr{V}$ 上的一个半范数, 其含义是

$$V \geqslant 0; \quad V(\lambda f) = |\lambda| V(f); \quad V(f_1+f_2) \leqslant V(f_1) + V(f_2).$$

2° $\mathscr{V}$ 包含递增函数的凸锥[①] $\mathscr{V}_0$, 并且 $\mathscr{V}$ 的所有元素是 $\mathscr{V}_0$ 的两个元素的差.

证明 1° 设 f 和 g 是 $[a,b]$ 上的任意两个数值函数, 令 $h=f+g$. 对于所有 $u,v \in [a,b]$, 有

$$|h(u)-h(v)| = |(f(v)-f(u)) + (g(v)-g(u))| \leqslant |f(v)-f(u)| + |g(v)-g(u)|.$$

于是对于 $[a,b]$ 的所有有限子集 σ, 有:

$$V_\sigma(h) \leqslant V_\sigma(f) + V_\sigma(g) \leqslant V_f + V_g$$

由此得到

$$V(f+g) = V(h) \leqslant V(f) + V(g).$$

于是, 如果 f 和 $g \in \mathscr{V}$, 则 $f+g \in \mathscr{V}$.

---

① 向量空间中的集合 C 称为凸锥, 是指它满足:
i) $\forall \lambda > 0,\ \lambda C \subset C$; ii) $C + C \subset C$. ——译者注

另外, 对于所有 $f \in \mathscr{V}$ 显然有 $V(\lambda f) = |\lambda| V(f)$. 故 $\mathscr{V}$ 显然是向量空间, 并且 V 是 $\mathscr{V}$ 上的半范数.

2° 我们已经知道, 如果 f 是递增的, 则 $V(f) = f(b) - f(a)$, 随之 $\mathscr{V}_0 \subset \mathscr{V}$. 由于 $\mathscr{V}$ 是一个向量空间, 如果 f 和 $g \in \mathscr{V}_0$, 则有 $f - g \in \mathscr{V}$; 现在证明其逆.

设 $f \in \mathscr{V}$. 对于所有 $t \in [a,b]$, 用 $\varphi(t)$ 表示 f 在 $[a,t]$ 上的全变差; 并且令

$$\psi(t) = \varphi(t) + f(t).$$

对于所有 $u, v \in [a,b]$, 若 $u < v$, 则

$$\psi(v) - \psi(u) = (\varphi(v) - \varphi(u)) + (f(v) - f(u)).$$

而由全变差的可加性得知 $\varphi(v) - \varphi(u)$ 是 f 在 $[u,v]$ 上的全变差; 故有

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geqslant |f(v) - f(u)|, \quad 由此知\ \psi(v) - \psi(u) \geqslant 0.$$

于是确实有 $\varphi, \psi \in \mathscr{V}_0$; 由于 $f = \psi - \varphi$, 性质被证实. □

推论 24-11 *在 $[a,b]$ 上的所有有界变差的数值函数在任何点上有左、右极限.*

事实上, 递增函数具有这个性质, 并且相减仍保持此性质.

连续函数情形 沿用前面的记号, 如果 f 是有界变差连续函数, 则函数 φ 连续 (推论 24-7); 从而 ψ 也连续.

于是, *所有有界变差连续数值函数是两个递增连续函数的差.*

有界变差数值函数的例子 24-12 1° 所有在 $\mathbb{R}$ 的区间 I 上的有界并且按区间单调的函数, 即存在 I 的一个由区间组成的有限分割 (区间有可能退缩为点), 使得 f 在每个区间是单调的. 当 f 连续时, f 在 I 上的全变差是它在这些子区间上的变差的和.

所有初等函数都有这一特性.

2° 如果 f 是 $[a,b]$ 上的比为 k 的 Lipschitz 映射, 则

$$V(f) \leqslant k(b-a).$$

特别地, 当函数 f 可导, 并且其导数 f' 有界时就是这种情形. 事实上, 如果 $|f'| \leqslant k$, 则 f 是比为 k 的 Lipschitz 映射.

更确切地说, 如果 f' 是连续的, 则有

$$V(f) = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

这是在推论 24-8 中所建立的关系式 (对于 $n = 1$) 的一个特殊情形.

3° 反之, 这里有一个在 $[a,b]$ 上处处可导但有无限全变差的连续函数的简单例子:

这是由下列关系在 $[-1,1]$ 上定义的函数 f:

$$f(0)=0; \qquad \text{对于所有 } x \neq 0, \quad f(x)=x^2\cos^2(\pi/x^2).$$

事实上, 对于每个大于 1 的整数 n, f 在 $[n^{-1/2},1]$ 上的全变差等于 $1+2(1/2+\cdots+1/(n-1))+1/n$①, 而这个和随着 n 趋于 $+\infty$.

IV. 习　　题

说明: 较难的习题都打上了星号.

直线 $\mathbb{R}$ 与空间 $\mathbb{R}^n$

1° 设 f 是区间 $[\alpha,\beta]$ 到区间 $[a,b]$ 上的严格递增双射. 证明, f 连续, 且反函数 f^{-1} 在 $[a,b]$ 上有定义并连续 (换句话说, f 是同胚).

*2° 设 A 和 B 是 $(0,1)$ 的两个可数处处稠子集.

a) 证明, 存在无限多个 A 到 B 上的递增双射.

b) 证明, 这种双射可以用唯一的方式延拓为 $[0,1]$ 到自身的同胚.

*3° 证明, 不存在任何把区间 $[0,1]$ 分为非空闭子集的可数分划.

4° 以 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 表示 $x\in[0,1)$ 的十进展开式; 令 $S_n(x)=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 且设 $\lambda\in[0,9)$. 证明, 对于任何 n 满足 $S_n\leqslant\lambda n$ 的 x 的集合是没有孤立点的紧集, 但不包含任何区间.

5° 证明任何 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的等距有形式为 $x\to a+x$ 或 $x\to a-x$.

6° 证明在 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 中, 任何紧方块的余集是连通的.

7° 设 D 是 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 的区域.

a) 证明, 对于 D 中的任意三个不同的点 a,b,c, 在 D 中存在包含 a 和 b、但不包含 c 的折线.

b) 由此推出, D 不同胚于 $\mathbb{R}$ 的任何子集.

8° 证明, $\mathbb{R}^n$ 的任何简单孤在 $\mathbb{R}^n$ 中疏 (利用习题 7).

9° 证明, $\mathbb{R}^n$ 中的由球面 $\sum x_i^2=1$ 去掉点 $(0,\cdots,0,1)$ 后的集合 A 同胚于 $\mathbb{R}^{n-1}$. (由 $n=2$ 或 3 开始, 利用球极平面射影, 然后推广这一处理方法).

10° 证明, $\mathbb{R}^n$ 的任何开球同胚于 $\mathbb{R}^n$.

①原书误为 $1+1/2+\cdots+1/n$. —— 译者注

11° 证明, $\mathbb{R}^2$ 的任何紧凸集或者是区间, 或者同胚于闭圆盘. 陈述并证明 $\mathbb{R}^n$ 中的类似结果.

12° 设 ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的包含 O 的开集. 又设 E 是满足 $[0,x]\subset\omega$ 的 $x\in\omega$ 的集合 (ω 中以 O 为中心的**星形**); 指出 E 是开集, 且与以 O 为起点的任何半直线 δ 交于一个区间.

对于任何 δ, 令 $\varphi(\delta)$ 为 $(\delta\cap E)$ 的长度. 证明, φ 是 δ 的下半连续函数 (参看第二章).

13° 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的子集 A 上的等距满射.

a) 证明, $\mathbb{R}^n$ 的任何直线 Δ 的像 $f(\Delta)$ 是直线.

b) 由此推出 f 是仿射变换, 且 $A=\mathbb{R}^n$.

拓扑空间

14° 设 E 为包含处处稠可数子集的拓扑空间. 证明, E 的任何不相交的非空开集族是有限的或可数的.

15° 考虑 $\mathbb{R}$ 的下列形式的子集集合 $\mathscr{O}$:

$$X=(\mathbb{R}\text{的开集})\diagdown(\text{有限或可数集}).$$

证明, $\mathscr{O}$ 是对于 $\mathbb{R}$ 上的某种拓扑 $\mathscr{C}$ 的开集的集, 并研究这种拓扑. 特别是, 确定 $\mathscr{C}$ 的紧集.

16° 设 A 为 $\mathbb{R}^2$ 的闭子集; S 为 A 中满足如下条件的点 x 的集合: x 在 A 中有一包含在顶点为 x、角度 $<\pi$ 的角内的邻域. 证明 S 为有限集或可数集.

17° 以 X^* 表示拓扑空间 E 的子集 X 的边界; 证明,

$$X^*=\left(X\cap\left(\overline{\complement X}\right)\right)\cup\left(\overline{X}\diagdown X\right).$$

18° 设 E 为拓扑空间; X 为 E 的子集. 我们把 E 中那些是 X 的点列的极限的点全体称为 X 的**序列附着集**; 我们说 X 是**序列闭的**, 是指它恒同于它的序列附着集. 通过例子指出, X 的序列附着集并非总是序列闭的 (利用习题 107).

什么是 X 的**序列闭包**? 是否总存在序列闭包?

19° 设 E 为拓扑空间, X 为 E 的闭子集. 我们称 X 的聚点集 $X^{(1)}$ 为 X 的**导集**; 再假设 $X^{(n+1)}$ 为 $X^{(n)}$ 的导集, 来定义逐次导集 $X^{(n)}$. 然后, 置

$$X^\omega=\cap X^{(n)}.$$

在 $\mathbb{R}$ 中构造闭集 A, 使得 $A^{(n)}$ (相应地, A^ω) 退化为一点.

20° 设 f 为拓扑空间 E 到 $\mathbb{R}$ 的映射; 证明, 如果对于任何 $\lambda\in\mathbb{R}$, $\{x:f(x)<\lambda\}$ 和 $\{x:f(x)>\lambda\}$ 是开集, 那么 f 连续. 更一般地, 设 f 为 E 到拓扑空间 F 的映射;

(ω_i) 为 F 的开集族, 使得 F 的任何开集都是开集 ω_i 的有限交的并 (我们说这个族**生成** F 的拓扑). 怎样用开集 ω_i 来刻画连续映射 f?

21° 我们说拓扑空间 E 到另一个拓扑空间 F 的映射 f 是**开的**, 是指对于任何 E 的开集 ω, $f(\omega)$ 是 F 的开集.

a) 证明, 乘积空间到每一因子空间的射影是开映射.

b) 刻画 $\mathbb{R}$ (相应地, $\mathbb{R}^n$) 到 $\mathbb{R}$ 的连续开映射的条件.

c) 证明, $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的非常数全纯映射是开的.

22° 设 f 为拓扑空间 E 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射. 证明, 对于任何 $\mathbb{R}$ 的开集 ω, $f^{-1}(\omega)$ 是 F_σ 开集 (参看习题 73).

23° 设 E 为有**可数基** (参看习题 88) 的拓扑空间, f 为 E 上的数值函数. 指出, 如果 M 表示其上 f 有局部最大值的点 $x \in E$ 的集合, 则 $f(M)$ 有限或可数.

24° 设 E 为有可数基的分离拓扑空间; 证明 E 的没有任何可数邻域的点的集合 P 是完全集 (没有孤立点的闭集). 证明 $(E \diagdown P)$ 至多为可数集.

25° 指出, $\mathbb{R}$ 的开集集 (和闭集集) 有连续统势; 对于 $\mathbb{R}^n$ 讨论同样问题. 由此推断 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^p$ 的连续映射集的势.

26° 我们说 n 个变量的实系数二次型 $\sum a_{ij}x_ix_j$ 是正定的, 是指它对于任何 $(x_i) \neq 0$ 大于 0. 证明, 在空间 $\mathbb{R}^N$ 中 $(N = n(n-1)/2)$, 表示这些二次型的点 $a = (a_{ij})$ 的集合是开集.

27° 是否存在 $[0,1]$ 上的连续数值函数 f, 使得 $f(x)$ 对于无理数 x 是有理数, 而对于有理数 x 是无理数?

28° 在 $\mathbb{R}$ 中求两个子集 X, Y, 使得它们中的每一个都是另一个通过连续双射后的像, 但它们并不同胚.

29° 设 X 为拓扑空间 E 的子集. 在怎样的条件下, X 的特征函数是连续的?

30° 设 X, Y 为分离拓扑空间 E 的两个子集, 并且 $E = X \cup Y$. 当 f 在 X 和 Y 上的限制连续时, f 是否也连续? 考察 X 和 Y 都是闭集 (或开集) 的情形.

31° 证明, 对于任何拓扑空间 E, $E \times E$ 的对角线 Δ 与 E 同胚.

32° 设 f 为拓扑空间 E 到拓扑空间 F 的连续映射, Γ 为 f 在 $E \times F$ 上的图像. 证明 E 和 Γ 同胚.

33° 设 E 为分离拓扑空间, f 为 E 到自身的连续映射. 指出 E 的满足 $f(x) = x$ 的点 x 的集合 I 是闭集.

给出 I 是空集而 E 是紧距离空间的各种例子. 证明这时 $d(x, f(x))$ 总保持大于常数 $k > 0$.

证明, 当 E 是 $\mathbb{R}^2$ 的包含 O 的线段的有限并集时, I 非空.

34° 证明, 为使空间 E 分离, 必须且只需 E^2 的对角线在 E^2 中是闭集.

35° 设 f 为分离空间 X 到自身的连续映射. 指出 X 的满足 $f(x) = x$ 的点 x 的

集合是闭集①.

36° 设 f, g 为拓扑空间 E 到分离拓扑空间 F 的两个连续映射. 如果 f 和 g 在 E 的处处稠子集上重合, 证明 $f = g$.

37° 设 $(a_{m,n})$ 为 $\mathbb{N}^2$ 到每点都有闭邻域基②的分离拓扑空间的映射. 证明, 如果

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{m,n} = a, \quad \lim_{m\to\infty} a_{m,n} = b_n, \quad \text{那么} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

38° 设 E 为分离拓扑空间, (a_n) 为 E 的收敛于 a 的点列. 证明集合 $\{a, a_1, a_2, \cdots\}$ 是紧的.

39° 构造 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $(x, y) \to f(x, y)$, 如下:

1. 偏映射 $x \to f(x, y)$ 和 $y \to f(x, y)$ 都是连续的.
2. f 的间断点集合在 $\mathbb{R}^2$ 中处处稠密.

40° 设 E 为拓扑空间, (ω_i) 为 E 的开集基 (参看习题 88). 指出, 如果 E 的任何由 ω_i 所构成的覆盖包含有限子覆盖, 那么 E 是紧的.

41° 设 (K_n) 是分离空间 E 的非空紧集的递减列. 证明 $K = \cap K_n$ 非空, 且对于任何包含 K 的开集 ω, 存在 K_n 包含在 ω 中.

42° 设 E 为无限紧空间; Δ 表示 $E \times E$ 的对角线. 证明存在 $E \times E$ 的可数子集 A, 满足

$$A \cap \Delta = \varnothing, \quad \overline{A} \cap \Delta \neq \varnothing.$$

43° 我们以 $\prec$ 表示定义在集合 $E = [0,1]^2$ 上的关系:

$$(x, y) \prec (x', y') \text{ 是指或者 } (x < x'), \text{ 或者 } (x = x', y \leqslant y').$$

a) 证明, 这是全序关系 (字典排列顺序).

b) 证明被赋以与这一序关系相联系的拓扑的 E 是紧的.

44° 设 (A_n) 为 $\mathbb{R}$ 的子集的递减列, 其中每一个都是有限个两两不交的闭区间的并集. 又假设组成 A_n 的每个区间恰好包含两个组成 A_{n+1} 的区间, 且这些区间的直径随着 $1/n$ 趋向于 0. 证明集合 $A = \cap A_n$ 是紧的, 且没有孤立点; 再证明这种 A 中的任意两个是同胚的.

45° 指出, 在任何分离空间 X 中, 如果两个紧子间 A 和 B 不相交, 那么它们具有不相交的邻域 (从处理 B 退化为一点的情形着手).

46° 设 X 为紧空间, Y 为任意拓扑空间. 证明, 如果 A 是 $X \times Y$ 中的闭集, 则它在 Y 上的射影也是闭的.

47° 设 f 为空间 X 到**分离**空间 Y 的映射.

a) 证明, 如果 f 连续, 则 f 的图像在 $X \times Y$ 中闭. 用一个例子证明 (其中 $X = Y = \mathbb{R}$), 其逆命题不成立.

---

①原文如此. 但这个题实际上是题 33° 的一部分. ——译者注

②这一条件为译者所加, 否则本题不成立. 原作者已同意译者的修改. ——译者注

b) 证明, 相反, 当 Y 是紧的时, 这两个论断是等价的.

48° 设 L 和 X 是两个紧空间, f 为 $L\times X$ 到分离空间 Y 的连续映射, 且满足对于任何 $\lambda\in L$, X 到 Y 的映射 $x\to f(\lambda,x)$ 是单射. 又设 $y_0\in Y$.

1. 证明, 使方程 $y_0=f(\lambda,x)$ 有解的 $\lambda\in L$ 的集合 L_0 是 L 中的闭集.

2. 证明, 这一方程的解 $x=\varphi(\lambda)$ 是 L_0 上的 λ 的连续函数.

49° 设在 $\mathbb{R}^3$ 中有两个圆 C_1 和 C_2. 基于最大值性质, 证明, 至少存在一条直线与 C_1 和 C_2 以及它们的轴相交.

50° 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上引入两条任意的轴, 并用方程 $ax+by+c=0$ 来定义直线, 这里 a 和 b 不全为零. 利用这一形式, 建立这些直线的集合 D 和 $\mathbb{R}^3$ 中通过原点的直线集合间的对应. 由此能在 D 上导得怎样的自然拓扑? 这一拓扑是否依赖轴的选择?

在 D 上可以附加怎样的元素使它变为紧的? 列举其他的与这个紧空间同胚的空间.

能否用类似的方式处理 $\mathbb{R}^3$ 的直线?

51° 指出, 如果乘积 $X\times Y$ 是紧的, 则 X 和 Y 都是紧的. 当 $(X\times Y)$ 为局部紧时, 类似的叙述是怎样的?

52° 设空间 $\mathbb{R}^3$ 中有三条直线 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$, 两两不平行也不相交. 证明, 在所有三角形 $(x_1,x_2,x_3), x_i\in\Delta_i(i=1,2,3)$ 中, 有一个面积 (相应地, 周长) 最小者.

53° 证明, $\mathbb{R}^2$ 中至少有一个坐标为无理数的点的集合是连通集.

54° 设 (C_n) 是拓扑空间 E 的连续统的递减列. 证明它们的交 $C=\cap C_n$ 也是连续统.

55° 指出函数 $y=\sin(1/x)(x\in(0,1])$ 的图像是连通的. 确定它的闭包, 并证明这是连续统, 但不是简单孤.

56° 设 G 为 $\mathbb{R}^n$ 的开集.

a) 证明 G 的每个连通分支是开集 (因而也是区域).

b) 证明这些连通分支的集合至多是可数集.

57° 设 A 为全序集, 并被赋以与它的序相联系的拓扑. 证明, 如果 A 是连通的, 则 A 的任何有上界子集有上确界, 且 A 的任何点都没有后继者 (y 是 x 的后继者是指 $x<y$, 且 $(x,y)=\varnothing$). 逆命题是否成立?

*58° 设 f 为 $[0,1]$ 到自身的同胚.

1. 证明 f 或者使端点不变, 或者使端点交换.

2. 如果 $f^2=$ 恒等映射, 证明, 或者 $f=$ 恒等映射, 或者 f 在某种可明确的意义下, 是中心对称的变形.

59° 设 f 是 $[0,1]$ 到自身的连续映射; 证明 f 至少有一个不动点[①].

60° 设 A 为 $[0,1]\times[0,1]$ 的闭子集, 且对于任何 $x\in[0,1]$, 使 $(x,y)\in A$ 的 y 集合是闭区间 l_x. 证明, 存在 x 满足 $x\in l_x$.

①本题是著名的 Brouwer 定理的特例, 但这里它又是题 33° 的特例. —— 译者注

61° 设 E 为拓扑空间, A 为 E 的子集. 证明, 任何与 $\mathring{A}$ 和 $\mathring{\complement} A$ 相交的 E 的连通子集也与 A 的边界相交.

距离空间

62° 设 E 为 $\mathbb{R}^3$ 的球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被赋以测地距离而得的距离空间.

对于任何 $m \in E$ 和数 $\rho > 0$, 计算中心为 m、半径为 ρ 的 "圆" 在 E 上的直径 $\delta(\rho)$. 证明 $\delta(\rho)$ 不是 ρ 的递增函数.

*63° 我们采用在《分析教程》第一章[①]有关 Cantor-Bernstein 定理的习题中的记号[②].

现在假定 A 和 B 是拓扑空间 (相应地, 距离空间), φ 和 ψ 是同胚 (相应地, 等距). 那么在这一习题中所提示的证明将导致怎样的陈述?

64° 设 (a_n) 为距离空间的点列. 指出这一序列的附着值集合恒同于该序列的收敛子列的极限集合.

65° 设 f 为距离空间 E 到拓扑空间 F 的映射. 证明 f 在点 a 上的连续性与下列性质等价:

对于 E 的任何满足 $\lim a_n = a$ 的序列 (a_n), 有 $\lim f(a_n) = f(a)$.

66° 设 f 为拓扑空间 X 到距离空间 Y 的映射. 对于任何 $x_0 \in X$, 我们称非负数 $\omega(f, x_0) = \inf(f(V)$ 的直径$)$ (其中 V 遍历 x_0 的邻域集) 为 f 在 x_0 上的**振幅**.

a) 指出 f 在 x_0 的连续性等价于等式 $\omega(f, x_0) = 0$[③].

b) 指出, 对于任何 $\varepsilon > 0$, E 的满足 $\omega(f, x) \geqslant \varepsilon$ 的点 x 的集合是闭集.

67° 设 E 为距离空间, $(m, n) \to a_{mn}$ 为 $\mathbb{N}^2$ 到 E 的映射. 假设

$$\lim_{n\to\infty} a_{mn} = a_m, \quad \lim_{m\to\infty} a_m = a.$$

证明, 存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $n \to p_n$, 使得

$$\lim a_{n,p_n} = a.$$

这个结果能否推广到拓扑空间 E 上?

68° 设 X 为距离空间, A 为 X 的子集. 对于任何数 $\rho > 0$, 我们以 $B(A, \rho)$ 表示满足 $d(x, A) < \rho$ 的 $x \in X$ 的集合.

a) 证明 $$B(A,\rho) = \bigcup_{x\in A} B(x,\rho).$$

b) 证明 $$\overline{A} = \bigcap_{\rho} B(A,\rho).$$

---

① 即指《分析教程》第一卷的第一章. ——译者注

② Cantor-Bernstein 定理是说, 如果对于集合 A, B, 存在单射 $\varphi: A \to B$ 和单射 $\psi: B \to A$, 那么必定存在 A, B 间的双射. ——译者注

③ 有关振幅和连续性的结果已出现在正文的 16–9 中. ——译者注

69° 设 X 为距离空间, A, B 为 X 的两个闭子集. 以 D_A, D_B, I 分别表示满足

$$d(x,A) < d(x,B); \quad d(x,A) > d(x,B); \quad d(x,A) = d(x,B)$$

的 x 的集合.

a) 指出 D_A 和 D_B 是开集. 由此推得 A 和 B 具有不相交的开邻域.

b) 证明 I 是闭集, 并对 X 是平面、A 和 B 表示 X 的直线、圆周或闭圆盘的情形, 确定这一集合.

70° 指出任何距离空间同胚于有界距离空间. 对于一致结构是否有类似的陈述?

71° 构造距离空间 E 到另一个距离空间 F 的连续 (甚至一致连续) 双射、但不是同胚的例子.

*72° 设 f 是拓扑空间 E 的处处稠子集 A 到距离空间 F 的映射, 且满足对于任何 $a \in E$, 存在 $\lim\limits_{x\in A, x\to a} f(x)$. 证明, f 存在 E 到 F 的唯一的连续延拓.

73° 我们说, 拓扑空间的子集 X 是 F_σ (相应地, G_δ), 是指 X 为闭集的可数并 (相应地, 开集的可数交).

a) 证明 F_σ 类 (相应地, G_δ 类) 对于可数并 (相应地, 可数交) 是稳定的.

b) 证明 F_σ 的余集是 G_δ; 反之亦然.

c) 给出 $\mathbb{R}$ 的子集的例子, 它是 $\mathbb{R}$ 的 F_σ, 但既非开集, 也非闭集.

d) 证明, 在距离空间中, 任何开集是 F_σ, 而任何闭集是 G_δ.

74° 设 E 为被赋有拟距离 d 和与此拟距离相联系的拓扑. 证明, 对于任何 $X \subset E$, 映射 $x \to d(x, X)$ 连续. 证明

$$\overline{X} = \{x : d(x, X) = 0\}.$$

75° 如果数值函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 中一致连续, 证明,

$$|f(x)| \leqslant a|x| + b,$$

其中 a 和 b 是非负常数, $|x|$ 是 x 到原点的距离.

76° 对于任何距离空间 E, 证明距离 $d(x,y)$ 在 E^2 上一致连续.

77° 构造在 $[0,1]$ 上的数值函数的例子, 使得它处处有有限导数, 但不是 Lipschitz 函数.

78° 设 E, F 为两个距离空间, $\varPhi$ 为 E 到 F 的映射族. 假定, 对于任何 $x \in E$, 任何 $f \in \varPhi$ 以及任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta(x, f, \varepsilon) > 0$, 使得

$$(d(x,y) < \eta(x,f,\varepsilon)) \Rightarrow (d(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

对于 η 不依赖于 ε、或不依赖于 x、或不依赖于 f、或既不依赖于 f 也不依赖于 x 等情况作出解释.

79° 设 E 为距离空间, $A \subset E$. 证明, $\overline{A}$ 的紧性等价于下列条件中的每一个:

a) 任何 A 的点列包含着在 E 中收敛的子列.

b) 任何 A 的无限子集至少有一个 E 中的聚点.

80° 设 (F_i) 为紧距离空间的闭集的有限族, 且其交是空集. 证明, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得任何与所有 F_i 都相交的集合有至少等于 ε 的直径.

*81° 设 K 是距离空间 E 的紧集; 以 $B(\varepsilon)$ 表示满足 $d(x, K) < \varepsilon$ 的 $x \in E$ 的集合. 证明这些 $B(\varepsilon)$ 构成 K 的邻域基. 这一条件能否推广到非紧集合 K?

82° 设 E 为紧距离空间. 证明, 任何与 E 等距的 E 的距离子空间 A 与 E 恒同. 用简单例子证明, 当 E 非紧时, 上述论点并不总成立.

83° 设 X, Y 为两个紧距离空间; f 为 X 到 Y 的映射, g 为 Y 到 X 的映射. 证明, 如果 f 和 g 都等距, 则有 $f(X) = Y$ 和 $g(Y) = X$.

84° 设 E 为非完备距离空间. 证明可在 E 上定义下列类型的连续函数:

a) f 连续, 但无界.

b) f 连续、有界, 但非一致连续.

当仅假设 E 非紧, 但完备时, 考察同样问题.

85° 本章中, 我们强调函数列的简单收敛一般不导致一致收敛. 试证, 在下列两种情形, 结果却是成立的:

a) X 为紧空间, f_n 为 X 到 $\mathbb{R}$ 的下半连续映射的**递增**列 (即当 $p \leqslant q$ 时, 对于任何 $x \in X$, 有 $f_p(x) \leqslant f_q(x)$), 而它简单收敛于**连续**函数 f (这个结果推广了 Dini 定理).

b) $X = [0, 1]$, f_n 为 X 到 $\mathbb{R}$ 的递增映射 (不一定连续) 的序列, 而它单收敛于连续函数 f.

86° 设 X, Y 为两个距离空间, 且 X 紧. 又设 f 和 $f_n (n \in \mathbb{N})$ 为 X 到 Y 的连续映射.

证明, 如果存在常数 $k > 0$, 使得对于任何整数 p, q 和任何 x, 有

$$d(f(x), f_{p+q}(x)) \leqslant kd(f(x), f_q(x)),$$

则 f_n 对 f 的简单收敛导致一致收敛. 这一结果推广了 Dini 定理.

*87° 指出任何紧距离空间或是有限集, 或是可数集, 或者有连续统的势.

更确切地说, 任何无孤立点的完备距离空间包含一同胚于 Cantor 三分集[①]的集合.

88° 所谓拓扑空间 E 的基是指任何 E 的开集族, 满足: E 的任何开集是基的子族的并.

①Cantor 三分集是 $[0, 1]$ 中一个有连续统势的测度为零的完全集. 由 $(0, 1)$ 中去掉 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, 再对 $(0, \frac{1}{3})$, $[\frac{2}{3}, 1]$ 去掉 $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$, $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$, 以后每次对余下的开区间去掉中间的 1/3 闭区间. 如此无限继续下去, 最后得到的集合就是 Cantor 三分集. 它由三进小数展开式之不含数字 2 的全体小数组成.
—— 译者注

证明

a) 如果 E 有可数基, 则 E 的任何开覆盖可选出可数子覆盖.

b) 如果 E 有可数基, 则 E 的任何子空间也有.

c) 如果两个空间 E_1 和 E_2 都有可数基, 则它们的乘积 $E_1 \times E_2$ 也有.

d) 如果 E 有可数基, 则 E 中存在处处稠可数子集.

e) 任何紧距离空间有可数基.

f) $\mathbb{R}^n$ 有可数基.

89° 对 $\mathbb{R}^n$ 中原点为 O 的半直线集给出自然拓扑; 对于包含 O 的直线集合考虑同样问题. 证明所得到的空间是紧的, 且可度量.

90° 我们以 E (相应地, E') 表示 Euclide 空间 $\mathbb{R}^2$ 的半径 $\geqslant 0$ (相应地, > 0) 的圆集合 (任何平面上的圆因而由 E 的点来表示).

a) 证明, 对于某种可明确的自然拓扑, E 同胚于 $\mathbb{R}^3$ 的闭半空间; 在这一同胚下, E' 变为什么?

b) 设 f 为 E 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射, 它使每个圆 C 联系它的中心 $f(C)$. 证明 f 连续. 又设 A 为 $\mathbb{R}^2$ 的闭子集. 对于圆心属于 A 的 E 的元素的集合, 以及对应的圆周与 A 相交的 E 的元素的集合, 我们能说些什么?

c) 证明, E 的其圆周包含在 $\mathbb{R}^2$ 的紧集 K 中的元素集合是紧集; 证明在这些元素中有一个半径达到最大值.

91° 证明, 对于任何距离空间的 Cauchy 列 (a_n), 集合 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 有界. 用例子证明, 逆命题不正确; 甚至可能存在这样的有界序列, 其任何子列都不是 Cauchy 列.

92° 设 E 为距离空间, (a_n) 为 E 的 Cauchy 列, (b_n) 为大于 0 的数列. 证明, 存在给定的序列的子列 (a_{n_p}), 使得对于任何 p, 有 $d(a_{n_p}, a_{n_{p+1}}) < b_p$.

93° 设 E, F 为两个距离空间, f 为 E 到 F 的双射. 证明, 如果 F 完备, f 一致连续, 且其逆连续, 那么 E 也完备.

94° 设 (f_n) 为集合 E 到完备距离空间 F 的一致收敛的映射列, 且 f 是 f_n 的极限.

证明, 如果对于任何 n, $f_n(E)$ 是相对紧的, 则 $f(E)$ 也是相对紧的.

95° 设 E 为完备距离空间; 证明 E 的紧性判别准则之一为: 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在用直径 $< \varepsilon$ 的集合覆盖 E 的有限覆盖.

96° 设 f 为距离空间 E 到距离空间 F 的连续映射, 它在 E 的任何有界集上一致连续.

a) 证明, 对于 E 的任何 Cauchy 列 (a_n), $(f(a_n))$ 是 F 的 Cauchy 列.

b) 如果 $E \subset E'$, 且 E 在 E' 中处处稠, 而 F 完备, 证明, f 能以唯一的方式延拓为 E' 到 F 的连续映射.

97° 证明, 如果两个距离空间的乘积 $X \times Y$ 完备, 那么 X 和 Y 都完备.

98° 设 E 为任意集合, F 为距离空间; 证明, 由 E 到 F 的有界映射组成的 $\mathscr{F}(E,F)$ 的子集 $\mathscr{B}(E,F)$ 在 $\mathscr{F}(E,F)$ 中既是开集又是闭集.

99° 证明, 由 E 到 F 的常值映射组成的 $\mathscr{F}(E,F)$ 的子空间 F' 在 $\mathscr{F}(E,F)$ 中闭, 且同构于 F.

100° 证明, 对于任何集合 E, $\mathscr{B}(E,\mathbb{R})$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $u \to \sup u(x)$ 连续.

101° 设 E 为紧距离空间, F 为有可数基的距离空间. 指出, $\mathscr{C}(E,F)$ 为有可数基的空间.

下面三个习题给出**范畴**推理理论基础的几个陈述.

*102° 设 E 为完备距离空间, G_n 为 E 的开集列, 其中每一个都在 E 上处处稠 ($\overline{G}_n = E$).

a) 证明, 集合 $G = \cap G_n$ 也是 E 的处处稠的开集的**递减**列的交.

b) 由此导得 G 非空, 更确切地说, G 在 E 上处处稠.

103° 设 E 为完备距离空间. 由习题 102 可推得不可能有:

$$E = \bigcup_n A_n, \quad \text{其中每个 } A_n \text{ 在 } E \text{ 中疏.}$$

104° 设 E 为完备距离空间. 由习题 103 可推得, 如果

$$E = \bigcup_n A_n,$$

其中每个 A_n 是闭集, 则存在某个 A_n, 其内部 $\mathring{A}_n$ 非空; 更确切地说, 开集 $G = \bigcup \mathring{A}_n$ 在 E 中处处稠.

105° 对于任何有理数 $x \in [0,1)$, 令 $x = p/q$, 其中 p, q 为两个互质的整数. 设 n 为 $\geqslant 3$ 的整数, $i(x)$ 是以 x 为中心、半长度为 $1/q^n$ 的 $\mathbb{R}$ 的开区间. 令

$$G_n = \bigcup_x i(x).$$

a) 证明, 对于任何 n, $i(x)$ 的长度和 l_n 有限, 且 $l_n \to 0$.

b) 证明, $G = \bigcap G_n$ 包含不同于有理数的点. 给出一个这种点的例子.

106° 设 E 为可数集, 其中的点为 $a_1, a_2, \cdots$. 令

$$d(a_p, a_p) = 0, \quad d(a_p, a_q) = 10 + 1/p + 1/q, \quad \text{当 } p \neq q.$$

a) 证明, d 是距离, 且被赋以这个距离的 E 是完备的.

b) 设 f 为 E 到 E 的映射, 且满足 $f(a_p) = a_{p+1}$. 证明, f 使距离严格减小, 但 f 没有任何不动点.

c) 把这个例子略加修正, 构造完备距离空间 F 和 F 到自身的使距离严格减小的映射 f, 它具有不动点 a, 但对于任何 $x \neq a$, $f^{(n)}(x)$ 不趋向于 a.

*107° 设 E 为 $[0,1]$ 到自身的任意映射的集合. 对于任何 $f_0 \in E$, 我们称任何集合 $V(f_0;\varepsilon;x_1,\cdots,x_n)$ 为中心是 f_0 的**基本集合**, 这里 $V(f_0;\varepsilon;x_1,\cdots,x_n)$ 表示满足 $|f(x_i)-f_0(x_i)|<\varepsilon(i=1,2,\cdots,n)$ 的 f 的集合, 其中 ε 为 >0 的数, 而 x_i 是 $[0,1]$ 中的点.

我们称任何基本集合的并为 E 的 "开集".

a) 验证, 这些 "开集" 满足公理 $O_1,O_2,O_3,O_4$①, 因而定义了 E 上的拓扑.

b) 如果我们称除了有限个点外, 在 $[0,1]$ 处处为零的函数 f 为**简单函数**, 指出, 简单函数集合在 E 上处处稠.

c) 证明, 对于不可数个 x 的值不为零的函数 f 不可能是简单函数 **序列**的极限.

d) 由此推得空间 E 上不可能定义任何距离, 使得联系该距离的拓扑就是 E 的拓扑, 换句话说, E 不可**度量**.

e) 证明, 任何简单函数是连续函数列的极限; 在有理数上为 1, 其他地方为 0 的函数 g 是简单函数列的极限, 但 g 不是连续函数列的极限.

108° 设 $\mathscr{F}$ 为距离空间 E 上连续数值函数的一致等度连续族, f 为 $\mathscr{F}$ 的元素的上包络. 证明, 如果 E 连通, 则 f 处处有限或处处等于 $+\infty$; 而当 f 有限时, 则它一致连续.

*109° 设 $(f_i)_{i\in I}$ 为拓扑空间 E 上连续且 $\geqslant 0$ 的数值函数族, 满足对于任何 $x\in E$ 和 $f(x)=\sum\limits_i f_i(x)$ 有限 (在第三章 8-2 的意义下), 而 f 连续.

证明, 对于任何 $J\subset I$, 函数 $f_J=\sum\limits_{i\in J} f_i$ 连续, 且 f_J 的族在任何点等度连续.

110° 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的一致连续数值函数. 令

$$f_a(x)=f(x-a).$$

证明, 函数 f_a 的集合在 $\mathbb{R}$ 上 "一致等度连续". 由此推得在 $\mathbb{R}$ 的任何紧集 K 上, f_a 的振幅集有界.

111° 设 A 为距离空间 E 的非空子集, f 为 A 到 $\mathbb{R}$ 的比为 k 的 Lipschitz 映射. 对于任何 $x\in E$ 和任何 $y\in A$, 令

$$f_y(x)=f(y)+kd(x,y).$$

证明, 由

$$g(x)=\inf_{y\in A} f_y(x)$$

定义的 g 对于任何 x 有限, 且为 k-Lipschitz 映射, 而它在 A 上的限制恒同于 f.

112° 设 E 为紧距离空间, J 为被赋以一致收敛距离的 E 上的连续数值函数空间 C 的紧子集. 证明, 对于任何 $\varepsilon>0$, 存在具有下列性质的常数 $k>0$:

① O_4 指分离性公理, 参看本章末的定义和公理. ——译者注

对于任何 $\alpha \in J$, 存在 $\beta \in C$ 满足 $\|\alpha-\beta\| \leqslant \varepsilon$, 而函数是比为 k 的 Lipschitz 函数 (应用上一习题, 并取 A 为 E 的适当的有限子集).

**113° 设 f 为 $[0,1]$ 上有有界变差的连续数值函数, $g(x)$ 为 f 在 $[0,x]$ 上的全变差.

证明, f 和 g (在直角坐标系中) 的图像有同样长度.

再指出, 由这两个图像绕 Oy 轴旋转产生的曲面有同样的面积; 更确切地说, 它们是 "等距的" (通过一保持曲线长度的同胚).

114° 令

$$f(x)=\sum_n 2^{-n}\sin(10^n x);$$

证明 f 在 $\mathbb{R}$ 的任何区间上的全变差为无限.

V. 第一章的法汉术语对照和索引[①]

①表中的数字表示节和段的序号.

VI. 参 考 文 献

BOURBAKI, N., *Topologie générale*, ch. I, III, IV, IX, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris.

DIEUDONNÉ, J., *Foundation of Modern Analysis*, Academic Press, N.Y., 1960. (有中译本: 现代分析基础, 科学出版社, 1983).

FRANKLIN, Philip, *A Treatise on Advanced Calculus*, John Wiley and Sons, N.Y., 1940.

KELLEY, J. L., *General Topology*, Van Nostrand Company, 1955. (有中译本: 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

KURATOWSKI, C., *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*, Monographie n° 15 de l'Ens. Math., Genève; *Topologie*, I et II, Varsovie.

NEWMAN, M. H. A., *Elements of Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge, 1939.

SIERPINSKI, W., *General Topology*, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1952.

WHYBURN, G. P., *Analytic Topology*, A.M.S. Colloquium Publications 28, New York.

VII. 定义和公理

拓扑空间的公理.

O_1: 空集和全空间是开集.

O_2: 任意**有限**个开集的交是开集.

O_3: 任意个开集的并是开集.

所谓**闭集**是指任何其余集为开集的集合.

闭集的性质.

F_1: 全空间和空集是闭集.

F_2: 任意**有限**个闭集的并是闭集.

F_3: 任意个闭集的交是闭集.

所谓空间 E 的点 x 的**邻域**是指 E 的任何包含含 x 的开集的子集.

分离空间. 空间 E 称为**分离的**, 是指它满足下列公理:

O_4: E 的两个不同点具有两个不**相交**的邻域.

空间的乘积. 如果 E_1, E_2 是两个拓扑空间, 乘积拓扑空间 $E = E_1 \times E_2$ 是取任何基本集合 $\omega_1 \times \omega_2$ 的并作为集合 $E_1 \times E_2$ 上的开集而得到的空间, 这里 ω_i 是 E_i 的开集 $(i = 1, 2)$.

紧空间. 空间 E 称为**紧的**, 是指它分离, 且还满足开覆盖公理:

O_5: 从 E 的任何开覆盖可选出有限覆盖.

连通空间. 空间 E 称为**连通的**, 是指 E 和 $\varnothing$ 是仅有的同时是 E 的开集和闭集的子集.

拓扑群, 拓扑环和拓扑域. **拓扑群**是被赋有拓扑的群, 对于该拓扑, 函数 (x^{-1}) 和 $(x \top y)$ 都连续.

拓扑环是赋有拓扑的环, 对于该拓扑, 函数 $(-x), (x + y), (x \cdot y)$ 都连续.

拓扑域: 除了对于拓扑环的同样条件外, 还有对于任何 $x \neq 0$ 的 x^{-1} 的连续性.

距离空间. **距离空间**是对它联系着距离 $d(x, y)$ 的集合 E, 这里距离是定义在 E^2 上的数值函数, 且满足:

M_1: $d(x, y) > 0$, 当 $x \neq y; d(x, x) = 0$.

M_2: $d(x, y) = d(y, x)$ (对称性).

M_3: $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (三角形不等式).

距离空间 E 称为**完备的**, 是指 E 的任何 Cauchy 列都收敛.

VIII. 经典记号的回顾

记号 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分别表示:

自然数集合 $\{0, 1, 2, \cdots\}$,

正负整数的集合,

有理数集合,

实数集合,

复数集合.

记号 $\mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$ 分别表示 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 中 $\geqslant 0$ 的元素集合.

记号 $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ 分别表示从 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 中各自去掉它们的 0 得到的集合.

最后, $\overline{\mathbb{R}}$ 表示由 $\mathbb{R}$ 加上两个无限点而得到的集合 $[-\infty, +\infty]$.

第二章　数值函数

称从 E 到扩展直线 $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ 的集合 E 上的任何一个映射为**数值**函数; 在 $\mathbb{R}$ 取值的映射称为**有限**数值函数, 或如果上下文明确表明它是有限的, 简单地称为数值函数. 这些函数的集合记做 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ (对应地, $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$).

在这一章要研究由 $\mathbb{R}$ 是一个域和是有序集引起的数值函数的特有的性质; 尤其要研究从 $\mathbb{R}$ 的区间到 $\mathbb{R}$ 内的映射类.

I. 定义在任意集合上的数值函数

§1. $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 和 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 上的序关系

用 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$(对应地, $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$) 表示 E 上的 (对应地, 有限) 数值函数集合.

集合 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 显然可以配备代数结构. 它同样具有与其代数结构相容的序结构:

对于所有 $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 我们说 f 是**正的**, 并且记做 $f \geqslant 0$, 如果对于每个 $x \in E$ 都有 $f(x) \geqslant 0$.

如果 $f \geqslant 0, g \geqslant 0$, 并且 $\lambda \in \mathbb{R}_+$, 则显然有:

$$f + g \geqslant 0, \quad fg \geqslant 0 \quad \text{和} \quad \lambda f \geqslant 0.$$

更一般地, 对于所有 $f, g \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$,

$$\text{如果 } g - f \geqslant 0, \text{ 则令 } f \leqslant g$$

(这等价于说对于每个 $x \in E, f(x) \leqslant g(x)$). 立即有关系 "$\leqslant$" 是 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 上的序关系 (如果 E 含有多于一个点, 它不是全序关系); 容易验证对于所有的 $f, g, h \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 和任意 $\lambda \in \mathbb{R}_+$, 关系 $f \leqslant g$ 蕴涵

$$f+h \leqslant g+h; \quad \lambda f \leqslant \lambda g; \quad 如果\ h \geqslant 0, fh \leqslant gh.$$

同样可以验证, 通过

$$f \leqslant g\ 是指\ f(x) \leqslant g(x)\ 对于每个\ x \in E\ 成立$$

定义的 $\mathscr{F}(E,\overline{\mathbb{R}})$ 上的关系是一个序关系. 不过要特别注意 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 上的运算不能推广到 $\mathscr{F}(E,\overline{\mathbb{R}})$ 上, 后者不是一个向量空间.

对所有 $f \in \mathscr{F}(E,\overline{\mathbb{R}})$, 用 $|f|$ 表示这样的函数: 对于每个 $x \in E, |f|(x) = |f(x)|$. 显然有关系式:

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|.$$

注 必须注意, 关系式 $f \geqslant 0$ 决不蕴涵或者对于每个 $x \in E$ 有 $f(x) = 0$, 或者对于每个 $x \in E$ 有 $f(x) > 0$.

§2. 数值函数的界

我们提醒 $\overline{\mathbb{R}}$ (对于序) 同构于 $[0,1]$; 由此得知 $\overline{\mathbb{R}}$ 的所有非空子集在 $\overline{\mathbb{R}}$ 里有上确界和下确界; 从而可以给出下列定义:

定义 2-1 对于任意 $f \in \mathscr{F}(E,\overline{\mathbb{R}})$ 和 E 的任意非空子集 X, 称 $f(X)$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 内的上确界 (对应地, 下确界) 为 f 在 X 上的**上确界** (对应地, **下确界**).

记这两个界为 $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ 和 $\inf\limits_{x \in X} f(x)$.

$\overline{\mathbb{R}}$ 的子集的上确界和下确界的性质蕴涵, 举例来说, 数 $a = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ 通过下列性质刻画其特征:

1° 对于所有 $x \in X$, 有 $f(x) \leqslant a$;

2° 对于每个 $b < a$, 存在 $x \in X$, 使得 $b < f(x)$.

当 f 在 X 上处处有限时, f 在 X 的振幅 (参见第一章第 16 节) 等于

$$\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x).$$

当 f 在 X 上不是处处有限时, 同样可由这个差定义 f 在 X 上的振幅, 至少当这个差有意义时, 也就是说, 当 $f(X)$ 不退化为点 $+\infty$ 或点 $-\infty$ 时可以这样做.

定义 2-2 如果 f 在 X 上的上确界 (对应地, 下确界) 小于 $+\infty$ (对应地, 大于 $-\infty$), 则说 f 在 X 上是**有上界的** (对应地, **有下界的**).

我们说 f 是**有界的**, 如果它是既是有上界的, 又是有下界的.

直接可以得到 $\inf\limits_{x\in X} f(x) = -\sup\limits_{x\in X}(-f(x))$, 这个关系式经常使得可以局限于研究上确界.

Z 说 f 在 X 上有界, 等价于说存在 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得对于所有 $x \in X$ 都有 $a \leqslant f(x) \leqslant b$. 于是如果 f 在 X 上是有界的, 它必然在 X 上是有限的; 但是反之, f 在 X 上可以是有限的, 却是无界的:

从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 内的映射 $x \to x^2$ 就是这样的例子.

命题 2-3 设 (f_i) 是 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 的元素的一个有限族; 则有

$$\sup_{x\in X}\sum_i f_i(x) \leqslant \sum_i \sup_{x\in X} f_i(x),$$

而如果 $f_i \geqslant 0$, 则有

$$\sup_{x\in X}\prod_i f_i(x) \leqslant \prod_i \sup_{x\in X} f_i(x).$$

比如证明第一个关系, 我们有:

$$f_i(x) \leqslant \sup_{x\in X} f_i(x), \quad 故 \quad \sum_i f_i(x) \leqslant \sum_i \sup_{x\in X} f_i(x),$$

由此即得结果.

§3. 函数族的上包络和下包络

设 $(f_i)_{i\in I}$ 是集合 E 上的数值函数的一个族. 为使一个数值函数 g 是这个族的一个上界, 必须且只需对于所有 $x \in E$, $f_i(x) \leqslant g(x)$ 对于所有 $i \in I$ 成立. 在这些函数 g 当中, 存在一个函数比所有其他的更小, 这就是由 $f(x) = \sup\limits_{i\in I} f_i(x)$ 定义的函数; 换句话说, 有序集 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 是完备格.①

定义 3-1 称由

$$对于每个 x \in E, f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$$

定义的函数为函数族 $(f_i)_{i\in I}$ 的**上包络**, 记做 $\sup\limits_{i\in I} f_i$. 同样可定义下包络 $\inf\limits_{i\in I} f_i$.

注 我们注意到一个函数的上确界和一个函数族的上包络的记号的相似性; 这种相似性决非偶然, 因为两个记号表示的都是一个是完备格的有序集的一个子集的上确界, 在第一种情形有序集是 $\mathbb{R}$, 而在第二种情形是 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$.

①序集 A 称为完备格, 是指 A 中任何有限集有界, 而任何有上 (下) 界的子集必定有上 (下) 确界. 利用 $\sup\limits_{i\in I}(-f_i(x)) = -\inf\limits_{i\in I} f_i(x)$, 可知 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 的有下界子集必定也有下确界. —— 译者注

例 1° 设 f_n 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 内的映射 $x \to \sin 2\pi nx$; 族 $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 的上包络是一个这样的函数 f: 如果 x 是无理数, 或者等于形如 $p/4q$ 的既约分数, $f(x)=1$; 在其余的点, $f(x)\neq 1$.

2° 设 φ_A 是闭集 $A\subset\mathbb{R}$ 的特征函数. 这个函数是处处大于等于 φ_A 的连续函数的族的下包络.

几何解释 3-2 对于所有 $f\in\mathscr{F}(E,\overline{\mathbb{R}})$, 用 $A(f)$ 表示乘积空间 $E\times\mathbb{R}$ 的位于 f 的图像上方即使得 $y\geqslant f(x)$ 的点 (x,y) 的集合.[①]

给定 $A(f)$ 等价于给定 f. 可以直接验证对于任意族 $(f_i)_{i\in I}$ 有

$$A(\sup_{i\in I} f_i)=\bigcap_{i\in I} A(f_i);$$

同样, 当 I 是有限集时有

$$A(\inf_{i\in I} f_i)=\bigcup_{i\in I} A(f_i).$$

当 I 是无限集时, 最后这个关系的左端包含于右端, 但两端未必相等.

在 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 里的上包络. 一致有上界的族.

a) 如果 $(f_i)_{i\in I}$ 是有限数值函数的一个有限族, 它的上包络仍然是有限的; 但当 I 是无限集时, 它的上包络可能是无限的; 为了使它是有限的, 必须且只需对于任意 x, $(f_i(x))_{i\in I}$ 是有上界的.

b) 设 $(f_i)_{i\in I}$ 是数值函数的一个族, 它的每个函数都是有上界的, 这并不蕴涵 $\sup\limits_{i\in I} f_i$ 是有上界的.

例如从任意 E 到 $\mathbb{R}$ 内的常值映射 $x\to n$ 的族 (f_n), 它是由有界函数组成的, 但其上包络不是有上界的.

当 $\sup\limits_{i\in I} f_i$ 有上界时, 就说族 $(f_i)_{i\in I}$ 是**一致有上界的**; 这也就是说存在一个有限数 λ, 使得对所有 $i\in I$ 和所有 $x\in E$, 都有 $f_i(x)\leqslant\lambda$.

同样可定义**一致有下界的**族. 一个族是一致有上界的并且一致有下界的, 则说它是**一致有界的**.

f^+ 和 f^- 的定义 对于所有数值函数 f. 令 $f^+=\sup(f,0)$. 换句话说, f^+ 由关系式

$$\text{对于每个} x\in E, f^+(x)=(f(x))^+$$

定义. 同样可定义

$$f^-=\sup(-f,0)=(-f)^+.$$

必须注意总有 $f^+\geqslant 0$ 和 $f^-\geqslant 0$.

[①] 不少文献上, 称这个点集 $A(f)$ 为 f 的**上图** (epigraph) 并记作 epi f. ——译者注

从对于实数的熟知性质:

$$a = a^+ - a^-; \quad |a| = a^+ + a^-,$$

推导出

$$f = f^+ - f^-; \quad |f| = f^+ + f^-.$$

由此得到

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f); \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

更一般地, 有

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}[(f+g) + |f-g|]; \quad \inf(f, g) = \frac{1}{2}[(f+g) - |f-g|].$$

由此推导出

$$\sup(f, g) + \inf(f, g) = f + g.$$

II. 数值函数的极限概念

每个 $f \in \mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 和每个 $x \in E$ 对应 $\overline{\mathbb{R}}$ 的元素 $f(x)$. 由于 $\overline{\mathbb{R}}$ 是一个拓扑空间, E 或者 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 的任意元素序列, 或者更一般地, E 或者 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 的任意滤子基, 就可以关联极限元素.

我们首先考察跟 E 上的滤子基关联的概念, 然后考察跟 $\mathscr{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 上的滤子基关联的概念.

§4. 函数沿 E 上的滤子基的上、下极限

设 f 是 E 上的一个数值函数, $\mathscr{B}$ 是 E 上的一个滤子基. 在第一章第 8 节曾经定义过 f 沿 $\mathscr{B}$ 的附着集; 这是集合

$$\overline{f}(\mathscr{B}) = \bigcap_{B \in \mathscr{B}} \overline{f(B)}.$$

由于 $\overline{f(B)}$ 的族具有有限交性质 (第一章第 11 节), 而且 $\overline{\mathbb{R}}$ 是紧致的, 故 $\overline{f}(\mathscr{B})$ 不是空集. 又由于 $\overline{\mathbb{R}}$ 的所有非空子集有上确界, 故可以提出下列定义:

定义 4-1 称集合 $\overline{f}(\mathscr{B})$ 的上确界为 f 沿滤子基 $\mathscr{B}$ 的上极限. 把它记做

$$\overline{\lim_{\mathscr{B}}} f \quad 或 \quad \limsup_{\mathscr{B}} f.$$

同样的方式可定义下极限.

特殊情形 1° 设 (x_n) 是 E 的点的一个序列; 集合 $B_n = \{x_i : i \geqslant n\}$ 构成 E 上的一个滤子基 $\mathscr{B}$. f 沿 $\mathscr{B}$ 的上极限称为序列 $(f(x_n))$ 的上极限.

2° 假定 E 配备了拓扑; 设 A 是 E 的一个非空子集, 而 $a \in \overline{A}$. 用 $\mathscr{B}$ 表示 E 的形为 $A \cap V$ 的子集, 其中 V 是 a 的一个邻域; 由于 $a \in \overline{A}$, 显然 $\mathscr{B}$ 是一个滤子基.

把 $\limsup\limits_{\mathscr{B}} f$ 记做 $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \sup f(x)$, 如果 $A = E$, 则记做 $\limsup\limits_{x \to a} f(x)$. 例如, 如果 $E = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, 而 $A = (\alpha, \beta]$, $a = \alpha$,[1] $\limsup\limits_{\mathscr{B}} f$ 称为 f 在点 a 的右极限.

3° 假定 E 是有递增滤子的有序集, 即 E 的每个有限子集有上界; 假定 f 是从 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的递增映射.

如果 $\mathscr{B}$ 表示 E 的形如 $\{x : x \geqslant a\}_{a \in E}$ 的子集的集合, 可以验证 $\mathscr{B}$ 是一个滤子基, 并且

$$\lim_{\mathscr{B}} f = \limsup_{\mathscr{B}} f = \sup_{x \in E} f(x).$$

立即得到的性质 1° 沿 $\mathscr{B}$ 的上极限属于 f 沿 $\mathscr{B}$ 的附着集.

2°

$$\liminf_{\mathscr{B}} f = -\limsup_{\mathscr{B}} (-f).$$

引理 4-2 设 f 是从集合 E 到一个紧致空间 X 的一个映射, $\mathscr{B}$ 是 E 上的一个滤子基, 再设 $\overline{f}(\mathscr{B})$ 是 f 沿 $\mathscr{B}$ 的附着集. 则对于 X 的使得 $\overline{f}(\mathscr{B}) \subset \omega$ 的每个开集 ω, 存在 $B \in \mathscr{B}$, 使得 $\overline{f(B)} \subset \omega$.

事实上, 诸闭集 $\overline{f(B)}$ 在紧集 $\complement\omega$ 上的迹的交 $\overline{f}(\mathscr{B}) \cap \complement\omega = \varnothing$. 故存在这些闭集的一个有限族 $(\overline{f(B_i)})$, 其交集与 $\complement\omega$ 不相交; 从而存在 $B \subset \mathscr{B}$ 包含于 $\bigcap B_i$, 这就是要找的 B.

命题 4-3 如果 f 是 E 上的一个数值函数, 则 f 沿滤子 $\mathscr{B}$ 收敛到 a, 等价于

$$a = \limsup_{\mathscr{B}} f = \liminf_{\mathscr{B}} f \quad 或者 \quad \{a\} = \overline{f}(\mathscr{B}).$$

事实上, 如果 $a = \lim\limits_{\mathscr{B}} f$, 则 a 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 内的任意闭邻域 V 包含一个集合 $f(B)$. 于是也包含 $\overline{f(B)}$; 从而 $\overline{f}(\mathscr{B}) \subset V$; 由此即得 $\overline{f}(\mathscr{B}) = \{a\}$.

反之, 如果 $\{a\} = \overline{f}(\mathscr{B})$, 则根据引理 4-2, 对于 a 的每个邻域 V, 存在 $B \in \mathscr{B}$, 使得 $\overline{f(B)} \subset V$, 故 f 沿 $\mathscr{B}$ 收敛到 a.

命题 4-4 设 f 是从拓扑空间 E 到 $\mathbb{R}$ 内的映射. 则对于所有 $a \in E$, f 在点 a 的振幅 (第一章, 16-9) 是 $\overline{\mathbb{R}_+}$ 的由

$$\omega(f, a) = \limsup_{x \to a} f(x) - \liminf_{x \to a} f(x)$$

[1] 原文遗漏 $a = \alpha$ 这一条件. ——译者注

定义的元素.

事实上, 上式两端都等于

$$\delta(f(V)) = \sup f(V) - \inf f(V)$$

沿 a 的邻域 V 的滤子基的极限.

推论 4-5 设 $f \in \mathscr{F}(E,\mathbb{R})$, 其中 E 是一个拓扑空间. 则 f 在 a 是连续的与 f 在 a 的振幅是零等价.

这是命题 4-3 的直接推论.

命题 4-6 设 $f,g \in \mathscr{F}(E,\overline{\mathbb{R}})$ 满足 $f \leqslant g$. 又设 $\mathscr{B}$ 是 E 上的一个滤子基; 则有不等式

$$\limsup_{\mathscr{B}} f \leqslant \limsup_{\mathscr{B}} g; \quad \liminf_{\mathscr{B}} f \leqslant \liminf_{\mathscr{B}} g$$

用 α 和 β 分别表示第一个不等式的两端.

如果 $\beta = +\infty$, 第一个不等式自动成立.

如果 $\beta < +\infty$, 引理 4-2 表明, 对于任意 k, 只要 $\beta < k$, 就存在 $B \in \mathscr{B}$, 使得 $g(B) < k$, 于是有 $f(B) < k$, 从而 $\overline{f(B)} \leqslant k$, 随之 $\alpha \leqslant k$; 因为这个关系式对于所有 $k > \beta$ 都成立, 故必有 $\alpha \leqslant \beta$.

第二个不等式从第一个推出, 只需用 $(-g)$ 代替 f, 用 $(-f)$ 代替 g.

推论 4-7 如果 $f \leqslant g$, 并且 f 和 g 分别有沿 $\mathscr{B}$ 的极限 α 和 β, 则 $\alpha \leqslant \beta$.

Z X 的紧致性对引理 4-2 的成立是不可或缺的; 而对于 $\overline{\mathbb{R}}$ 得到的结论也不能推广到 $\mathbb{R}$.

例如, 在 $\mathbb{R}$ 上定义的有限数值函数 g:

$$当\ x > 0\ 时, g(x) = 1/x; \quad 当\ x \leqslant 0\ 时, g(x) = 0.$$

它在点 0 在 $\mathbb{R}$ 里只有附着值 0, 但是它在 0 上不连续.

同样, 用 f 表示 g 和 1 的下包络, 则 $f \leqslant g$, 但是在 $\mathbb{R}$ 里, f 和 g 在点 0 的附着值集分别是 $\{0,1\}$ 和 $\{0\}$.

§5. 函数族的上、下极限

设 $(f_i)_{i\in I}$ 是 $\mathscr{F}(E,\overline{\mathbb{R}})$ 的元素族, $\mathscr{B}$ 是 I 的一个滤子基.

对于每个 $x \in E$, 从 I 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 内的映射 $\varphi_x : i \to f_i(x)$ 有一个沿 $\mathscr{B}$ 的附着集 $\overline{\varphi}_x(\mathscr{B})$.

所有从 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 内的映射 f, 如果对于每个 $x \in E$, 都有 $f(x) \in \overline{\varphi}_x(\mathscr{B})$, 则说该映射是族 $(f_i)_{i\in I}$ 沿 $\mathscr{B}$ 的附着值.

这些附着值的集合包含其上确界和下确界, 这正是映射

$$x \to \liminf_{\mathscr{B}} f_i(x) \quad 和 \quad x \to \limsup_{\mathscr{B}} f_i(x).$$

把它们记做 $\liminf\limits_{\mathscr{B}}(f_i)$ 和 $\limsup\limits_{\mathscr{B}}(f_i)$.

命题 5-1 设 $(f_i)_{i\in I}$ 和 $(g_i)_{i\in I}$ 是 $\mathscr{F}(E,\overline{\mathbb{R}})$ 的元素的两个族; 而 $\mathscr{B}$ 是 I 的一个滤子基.

如果对于每个 $i \in I$, 都有 $f_i \leqslant g_i$, 则

$$\limsup_{\mathscr{B}}(f_i) \leqslant \limsup_{\mathscr{B}}(g_i); \quad \liminf_{\mathscr{B}}(f_i) \leqslant \liminf_{\mathscr{B}}(g_i).$$

事实上, 对于每个 $x \in E$, 对 φ_x 应用命题 4-6, 例如可以得到

$$\limsup_{\mathscr{B}} f_i(x) \leqslant \limsup_{\mathscr{B}} g_i(x).$$

1° 如果对于所有 i, $f_i < g_i$, 即对于所有 i 和所有 x 都有 $f_i(x) < g_i(x)$, 这个严格不等式不能过渡到极限, 也就是说, 一般没有

$$\limsup_{\mathscr{B}}(f_i) < \limsup_{\mathscr{B}}(g_i).$$

2° 一般不存在 (f_n) 的收敛子列 (f_{n_p}), 其极限等于 $\limsup(f_n)$. 为确信这个事实, 只需对于所有 $x \in \mathbb{R}$, 令 $f_n(x) = (-1)^n x$.

§6. 在连续函数上的运算

命题 6-1 设 E 是一个拓扑空间, $a \in E$. $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 的由在 a 连续的函数组成的子集 A 是 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 的一个子代数格.[1]

事实上, 从 $\mathbb{R}$ 上的加法和乘法的连续性推得, 如果 f 和 g 在 a 是连续的, 则 $f+g$, fg 以及 λf (对于所有数值 λ) 在 a 也是连续的. 另外从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $\varphi: u \to |u|$ 是连续的, 于是对于 $f \in A, |f| = \varphi \circ f$ 也在 A 内. 于是更一般地, 关系式

$$\sup(f,g) = \frac{1}{2}[(f+g) + |f-g|]$$

表明: 如果 $f, g \in A$, 则也有 $\sup(f,g) \in A$. 这些结论显然推广到 A 的元素所有有限族的上包络和下包络.

[1] 序集 A 称为**格**, 是指它的任何有限元素族有上、下确界. 如果它同时还是 ($\mathbb{R}$ 上的) 向量空间, 且满足 i) $\forall x,y,z \in A, x \leqslant y \Longrightarrow x+z \leqslant y+z$; ii) $\forall x,y \in A, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, x \leqslant y \Longrightarrow \lambda x \leqslant \lambda y$. 那么 A 称为**向量格**. 如果向量格 A 同时还是代数 (即它同时还是与向量空间运算相容的环), 且满足iii) $\forall x,y \in A, \{0 \leqslant x, 0 \leqslant y\} \Longrightarrow 0 \leqslant xy$, 那么 A 称为**代数格**. 不难验证, $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 对于通常的代数运算与序关系形成代数格.
——译者注

命题 6-2 设 E 是一个距离空间, U (对应地, L) 是 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 的由 E 上的一致连续 (对应地, Lipschitz 的) 函数组成的子集.

则 U 和 L 是 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 的格化的向量子空间.

模仿前面的证明, 只需注意到从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $(u,v) \to (u+v)$ 和从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $u \to |u|$ 是 Lipschitz 的 (从而是一致连续的).

Z U 和 L 对于乘法的稳定性是不成立的. 举例来说, 从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的数值函数 $x \to x$ 属于 U 和 L, 但是它的平方 $x \to x^2$ 却并非如此.

命题 6-3 设 $(f_i)_{i\in I}$ 是 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 的元素的任意一个族, f 是它的上包络.

如果每个 f_i 是比为 k 的 Lipschitz 映射, f 至少在一个点是有限的, 则 f 是处处有限的, 并且是比为 k 的 Lipschitz 映射.

事实上, 对于所有 $x,y \in E$, 根据假设, 有

$$f_i(y) \leqslant kd(x,y) + f_i(x),$$

于是

$$f(y) \leqslant kd(x,y) + f(x).$$

从而如果 $f(x) < \infty$, 则有 $f(y) < \infty$, 即 $f(y)$ 有限. 这样对于所有 $x,y \in E$ 就有

$$f(y) - f(x) \leqslant kd(x,y),$$

同样有

$$f(x) - f(y) \leqslant kd(x,y).$$

故 f 是比为 k 的 Lipschitz 映射.

对于下包络显然有类似的结论.

例 设 E 是一个距离空间, $A \subset E$.

对于所有 $x \in E$, 令

$$f(x) = \sup_{a\in A} d(x,a), \quad g(x) = \inf_{a\in A} d(x,a),$$

每个函数 $x \to d(x,a)$ 是比为 1 的 Lipschitz 映射, 于是 g 是比为 1 的 Lipschitz 映射. 而如果 f 在一个点是有限的 (这相当 A 是有界的), 则 f 是处处有限的, 并且是比为 1 的 Lipschitz 映射.

Z 一致连续函数族的上包络和下包络是一致连续的这个论断并不成立. 它甚至连连续的都可能不是; 例如, $[0,1]$ 上函数 $1/(1+x^2)^n$ 的族就有一个不连续的下包络. 为了使得这种类型的一个断言成立, 必须假定族 (f_i) 具有附加的性质, 例如它是同等连续的.

在下一节, 连续函数族的上包络或下包络虽然不一定是连续的, 但是还是具有引人注目的性质.

III. 半连续数值函数

设 f 是定义在一个拓扑空间 E 上的有限数值函数. 说 f 在 $a \in E$ 是连续的, 等价于说下列每个条件成立:

1° 对于所有 $\lambda < f(a)$, 存在 a 的一个邻域 V, 使得 $\lambda < f(V)$.

2° 对于所有 $\lambda > f(a)$, 存在 a 的一个邻域 V, 使得 $\lambda > f(V)$.

当仅保留其中的一个条件时, 就引导到半连续的概念.

§7. 点上的半连续性

定义 7-1 *设 E 是一个拓扑空间, 而 $f \in \mathscr{F}(E,\overline{\mathbb{R}})$. 说 f 在点 E 的一个点 a 是* **下半连续的**, *是指对于所有 $\lambda < f(a)$, 存在 a 的一个邻域 V, 使得 $\lambda < f(V)$.*

当这个条件对于 E 的所有点成立时, 就说 f 在 E 内是下半连续的.

改变不等号的方向就得到上半连续的定义.

显而易见, f 在 a 的下半连续性等价于 $-f$ 在 a 的上半连续性. 这个事实让我们我们可以只针对下半连续的函数表述大部分的内容.

例 1° 设 f_n 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的这样的函数: $f_n(0) = 0$, 而对于 $x \neq 0$, $f_n(x) = x^{-n}$. 对于所有的偶整数 n, f_n 在点 0 是下半连续的. 对于所有奇整数 n, f_n 在点 0 既不是下半连续的, 也不是上半连续的.

2° 设从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数 f 如下定义: 如果 x 是有理数, 则 $f(x) = 0$, 如果 x 是无理数, 则 $f(x) = 1$. 函数 f 在所有有理点是下半连续的, 而在所有无理点是上半连续的.

命题 7-2 *f 在点 a 下半连续等价于*

$$f(a) = \liminf_{x \to a} f(x).^{①}$$

证明 a) 假定 f 在 a 是下半连续的, $\lambda < f(a)$. 存在 a 的一个邻域 V, 使得 $\lambda < f(V)$; 同样有

$$\lambda \leqslant \overline{f(V)}, \quad \text{由此} \quad \lambda \leqslant \liminf_{x \to a} f(x).$$

①不少文献中这个等式被代替为不等式 $f(a) \leqslant \liminf\limits_{x \to a} f(x)$. 这主要是对下极限的理解不同而引起的. 如果把下极限理解为 $\liminf\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$, 那么这里必须用不等式. —— 译者注

由于这个关系式对于所有 $\lambda < f(a)$ 成立, 故也有

$$f(a) \leqslant \liminf_{x \to a} f(x).$$

而由于对于所有 V, 有 $f(a) \in f(V)$, 反向不等式也真; 故等式成立.

b) 反之, 假定 $f(a) = \liminf_{x \to a} f(x)$. 那么对于所有 $\lambda < f(a)$, 根据引理 4-2, 存在 a 的一个邻域 V, 使得 $\lambda < f(V)$. 这就是说, f 在 a 是下半连续的. □

命题 7-3 在 a 下半连续并且大于 $-\infty$ 的函数的集合 $\mathscr{I}(a)$ 对于加法是稳定的.

事实上, 设 $f, g \in \mathscr{I}(a)$, 而 $\lambda < f(a) + g(a)$. 我们记 $\lambda = \alpha + \beta$, 其中 $\alpha < f(a)$ 并且 $\beta < g(a)$. 存在 a 的一个邻域 U, 使得 $\alpha < f(U)$, 还存在 a 的一个邻域 V, 使得 $\beta < g(V)$. 于是有

$$\text{对于所有} x \in U \cap V, \lambda = \alpha + \beta < (f+g)(x).$$

这就证明了 $f + g \in \mathscr{I}(a)$.

推论 7-4 $\mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ 的由在 a 下半连续的函数组成的子集是一个凸锥.[①]

我们这就停止在一个点的半连续性的研究, 转而研究有意思得多的在全空间里半连续性的研究.

§8. 全空间上的下半连续函数

为使从空间 E 到空间 F 的一个映射 f 是连续的, 必须且只需 F 的所有闭集的通过 f 的逆像是 E 的闭集. 我们即将看到半连续函数也有一个类似的特征.

命题 8-1 从空间 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的一个映射 f 在 E 里是下半连续的, 等价于对于所有 $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, 使得 $f(x) \leqslant \lambda$ 的点 x 的集合是闭集 (或者同样地, 使得 $\lambda < f(x)$ 的 x 的集合是开集).

事实上, f 在 a 的下半连续性, 等价于对于所有 $\lambda < f(a)$, 使得 $\lambda < f(x)$ 的 x 的集合是 a 的一个邻域; 换句话说, 在全空间的下半连续性, 等价于对于所有 λ, 使得 $\lambda < f(x)$ 的 x 的集合是它的每个点的邻域, 从而是开集.

推论 8-2 设 φ_A 是 E 的子集 A 的特征函数. 则 φ_A 是下半连续的等价于 A 是开集. 同样, φ_A 是上半连续的等价于 A 是闭集.

事实上, 使得 $\lambda < \varphi_A(x)$ 的 x 的集合, 当 $\lambda \geqslant 1$ 时是 $\varnothing$, 而当 $\lambda < 1$ 时是 A.

下半连续性的几何解释 在 3-2 中, 我们曾经令所有从 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的映射 f 对应乘积空间 $E \times \overline{\mathbb{R}}$ 的一个子集 $A(f)$.

我们要简单地通过 $A(f)$ (参见图 6) 解释下半连续性.

---

①凸锥的定义见第一章, 命题 24–10 中译者注. ——译者注

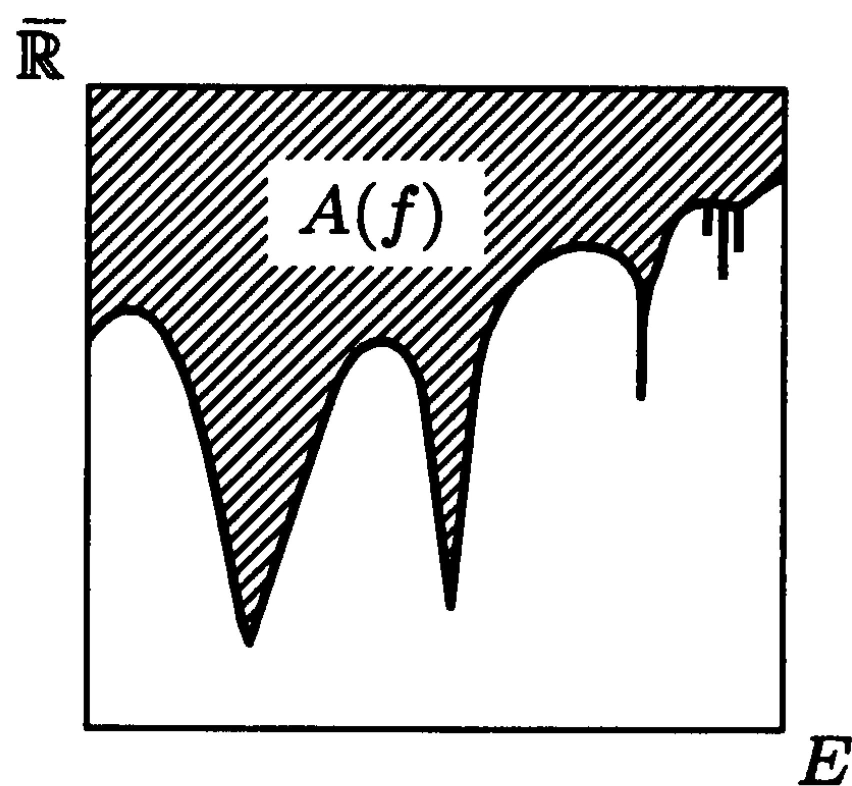


图 6

命题 8-3 从拓扑空间 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 内的映射 f 是下半连续的, 等价于 $A(f)$ 是 $E\times\overline{\mathbb{R}}$ 内的闭集.

证明 $A(f)$ 是闭集, 等价于它的补集是开集, 也等价于这个补集 $\complement A(f)$ 是它的每个点的邻域.

f 在 E 内的下半连续性等价于对于所有使得 $\lambda < f(a)$ 的二元组 (a,λ) (即对于所有 $(a,\lambda)\in\complement A(f)$) 和所有满足 $\lambda<\mu<f(a)$ 的 μ, 在 a 的一个邻域 V 内有 $\mu<f(x)$. 换句话说, 这等价于存在 (a,λ) 的一个邻域 (这就是 $V\times[-\infty,\mu)$) 包含于 $\complement A(f)$.

所断言的等价性随之得证. □

在半连续函数上的运算 命题 7-3 告诉我们, 下半连续函数的类在加法运算下是稳定的; 我们将发现它在一些其他的运算下也是稳定的.

命题 8-4 设 f 是从空间 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的区间 $[\alpha,\beta]$ 内的下半连续映射, 而 φ 是从 $[\alpha,\beta]$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 内的递增且连续的映射. 则复合映射 $g=\varphi\circ f$ 是下半连续的.

这是命题 8-1 的直接推论. 因为对于所有 λ, $\varphi^{-1}([-\infty,\lambda])$ 有形式 $([\alpha,\mu])$; 而 $f^{-1}([\alpha,\mu])$ 是闭集, 因为这个集合恒同于 $f^{-1}([-\infty,\mu])$. 而这个集合正是 $g^{-1}([-\infty,\lambda])$, 遂得命题.

推论 8-5 设 f 和 g 大于 0, 并且在 E 是下半连续的, 则 fg 也如此.

事实上, 用命题 8-4, 依次取 φ 为对数函数和指数函数:

$\log f$ 和 $\log g$ 都大于 $-\infty$, 并且是下半连续的; 故 $\log(fg)=\log f+\log g$ 也是如此, 从而 fg 也如此.

定理 8-6 下半连续的数值函数的所有族 $(f_i)_{i\in I}$ 的上包络也是下半连续的. 下半连续的数值函数的所有**有限**族的下包络也是下半连续的.

这是命题 8-3 和 3-2 中公式的直接推论.

事实上, 如果每个 $A(f_i)$ 是闭集, 则 $\bigcap A(f_i)$ 也是闭集, 从而 $\sup(f_i)$ 是下半连续

的. 同样, 如果 I 是有限的, 则 $\bigcup A(f_i)$ 是闭集, 于是 $\inf(f_i)$ 是下半连续的.

特殊情形 **连续**函数的所有族的上包络是下半连续的.

更特殊地, 如果 (f_n) 是连续的数值函数的一个递增序列, 则它的极限 f 恒同于 $\sup(f_n)$, 故 f 是下半连续的. 这个性质的逆命题在习题 9 和 10 里研究.

对于上半连续性有类似的结论, 当然上包络要换成下包络, 对于逆命题也有类似的结论.

Z 定理 8-6 不能推广到下半连续函数的所有无限族的下包络.

事实上, 设 f 是 E 内的**任意**数值函数. 它是如下定义的函数 f_a 的族的下包络:

$$f_a(x) = +\infty \quad \text{对于所有 } x \neq a; \quad f_a(a) = f(a).$$

显然每个函数 f_a 是下半连续的.

§9. 下半连续函数的构造

半连续函数至少象连续函数一样接近于我们的感觉经验. 下面的例子有助于我们理解它.

当我们注视一个不透明的物体时, 在所有从我们的眼睛出发的任一半直线上, 仅能看到此物体的单独一个点; 这个点到我们眼睛的距离是这条半直线的方向的函数; 这个函数不是连续的, 而是下半连续的, 只要我们认为所观察的物体是一个闭集.

这个例子适当地推广, 可以用来提供更一般的下半连续函数的例子.

事实上, 给定一个拓扑空间 E, 设 A 是乘积空间 $E \times \overline{\mathbb{R}}$ 的一个闭子集. 对于所有 $x \in E$, 设 $f_A(x)$ 是横坐标为 x 的 A 的点的纵坐标的下确界 (如果没有这样的点, 则取 $+\infty$).

容易证明如此定义的函数 f_A 是下半连续的. 反之, 根据命题 8-3, E 上的所有下半连续的函数都可以用这个手段得到.

例 设 g 是从拓扑空间 E 到 $\mathbb{R}$ 的任意映射; 又设 Γ 是 g 的图像. 集合 $\overline{\Gamma}$ 是 $E \times \overline{\mathbb{R}}$ 的一个闭子集. 用上面的手段得到的与 $\overline{\Gamma}$ 相联系的 $f_{\overline{\Gamma}}$ 是下半连续的; 容易验证, 对于所有 $x \in E$, 有

$$f_{\overline{\Gamma}}(x) = \liminf_{t \to x} g(t).$$

同样, 函数 $\limsup_{t \to x} g(t)$ 是上半连续的. 随之它们的差 $\omega(f; x)$ 是上半连续的.

§10. 紧致空间上的半连续函数

定理 10-1 对于所有从一个紧致空间 E 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 内的下半连续的映射 f, 至少存

在 E 的一个点 a, 使得

$$f(a)=\inf_{x\in E}f(x).$$

事实上, 令

$$m=\inf_{x\in E}f(x).$$

对于所有 $\lambda>m$, 使得 $f(x)\leqslant\lambda$ 的 x 的集合 E_λ 是闭集, 并且是非空的.

另外, E_λ 的族对于包含关系是全序的, 这是由于 E_λ 是 λ 的递增函数. 故 (第一章, 命题 11-4) E_λ 的交集不是空集. 在这个交集任意取一个点 a, 对于所有 $\lambda>m$, 有 $f(a)\leqslant\lambda$, 故 $f(a)\leqslant m$.

另外, 由 m 的定义, 有 $f\geqslant m$, 故 $f(a)=m$.

推论 10-2 所有从一个紧致空间 E 到 $(-\infty,+\infty]$ 内的下半连续的映射在 E 上是有下界的.

事实上, 我们有 $m=f(a)>-\infty$, 故 $f\geqslant f(a)>-\infty$.

对于上半连续的函数有类似的结论.

如果我们应用这些结果到连续函数, 就重新得到原先的断言: 紧致空间上的连续函数取到下确界和上确界的结论.

下一节我们要研究这些结果对于变分法的一个重要应用.

§11. 长度的半连续性

一条曲线的长度是这条曲线的函数; 当曲线在我们就要明确的意义下连续变动时, 人们可能期待它的长度也连续地变化. 其实根本不是这样. 像下面的初等例子所表明的那样:

设 C_n 是方程为 $y=n^{-1}\sin nx$ $(0\leqslant x\leqslant\pi, n\in\mathbb{N}^*)$ 的 (在直角坐标系里的) 平面曲线.

立即得到所有这些曲线有同样的长度, 这是一个数 $l>\pi$. 而当 $n\to+\infty$ 时, 这些曲线一致收敛到线段 $[0,\pi]$. 故这个一致收敛不蕴涵长度的收敛.

可以修改这个例子, 而用任何大于等于 π 的数代替 l. 但值得注意的是不能用一个小于 π 的数代替 l.

换句话说, 收敛到线段 $[0,\pi]$ 的曲线长度的下极限等于 π. 这正是下半连续性, 我们就要精确表述这个事实.

参数化曲线空间 设 T 是 $\mathbb{R}$ 的一个紧致区间, E 是一个距离空间. 根据前面的定义 (参见第一章, 第 24 节), 所有从 T 到 E 内的连续映射定义一条参数化曲线. 于是可以考虑从 T 到 E 内的连续映射的集合 $\mathscr{C}(T,E)$ 作为 T 上的 E 的参数化曲线的集合.

取与由

$$d(f,g) = \sup_{t \in T} d(f(t), g(t))$$

定义的一致收敛的与这个距离关联的拓扑作为 $\mathscr{C}(T,E)$ 上的拓扑.

对于 $f \in \mathscr{C}(T,E)$, 用 $L(f)$ 表示由 f 定义的曲线的长度. 我们有了一个定义在拓扑空间 $\mathscr{C}(T,E)$ 上的数值函数.

定理 11-1 *长度 $L(f)$ 是 $\mathscr{C}(T,E)$ 的 f 的下半连续函数.*

证明 对于 T 的所有有限子集 $\sigma = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$, 其中 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 对于所有 $f \in \mathscr{C}(T,E)$, 令

$$V_\sigma(f) = \sum_i d(f(t_i), f(t_{i+1})).$$

对于所有 $a \in T$, 从 $\mathscr{C}(T,E)$ 到 E 内的映射 $f \to f(a)$ 是连续的, 于是对于所有 σ, 映射 $f \to V_\sigma(f)$ 是连续的.

而 $L(f) = \sup V_\sigma(f)$ (参见第一章, 第 24 节), 故 L 是连续函数 V_σ 的上包络; 于是根据定理 8-6, L 是下半连续的. □

推论 11-2 *从 $\mathscr{C}(T,E)$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 内的映射 $f \to$ (f的全变差) 是下半连续的.*

对于变分法的应用 单变量变分法的问题之一是在给定的曲线集合里求一条曲线, 其长度是最小的.

这个问题的解由下列引理提供, 而这个引理由相继利用定理 10-1 和定理 11-1 推导出来.

引理 11-3 *在 $\mathscr{C}(T,E)$ 的所有紧致集 K 里, 存在一个元素 f_0, 使得*

$$L(f_0) = \inf_{f \in K} L(f).$$

于是这就引导我们找 $\mathscr{C}(T,E)$ 的紧致子集.

引理 11-4 *设 T 是一个区间 $[a,b]$, 其中 $a < b$.*

对于所有 $f \in \mathscr{C}(T,E)$, 如果 $L(f) < l$, 则存在一个从 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的一个递增同胚 α, 使得 $f \circ \alpha$ 是比为 l 的 Lipschitz 映射.

证明 对于所有 $x \in [a,b]$, 设 $V(x)$ 是 f 在 $[a,x]$ 上的全变差; 令

$$\beta(x) = k_1 V(x) + k_2(x - a).$$

如果 $k_1 = 1/l$, 而 $k_2 = (l - L(f))/(b-a)l$, 则直接验证可知映射 β 是从 $[a,b]$ 到 $[0,1]$ 的递增同胚. 用 α 表示逆映射 β^{-1}.

由于递增的变量替换不改变全变差 (第一章, 命题 24-5), 对于 $x, y \in [0,1]$, 如果 $x < y$, 则

$$
\begin{aligned}
|f\circ\alpha(y) - f\circ\alpha(x)| &\leqslant f\circ\alpha \text{在 } [x,y] \text{ 上的全变差} \\
&= f \text{ 在 } [\alpha(x),\alpha(y)] \text{ 上的全变差} \\
&= V(\alpha(y)) - V(\alpha(x)) \leqslant l(\beta(\alpha(y)) - \beta(\alpha(x))) \\
&= l(y-x).
\end{aligned}
$$

不等式 $|f\circ\alpha(y) - f\circ\alpha(x)| \leqslant l(y-x)$ 确立了所述的性质. □

推论 11-5 对于任意一族长度小于 l 的 E 的参数化曲线族 $(C_i)_{i\in I}$, 存在属于 $\mathscr{C}([0,1],E)$ 的参数化曲线的族 $(C'_i)_{i\in I}$, 使得对于所有 $i\in I$, C_i 和 C'_i 对于变量替换是等价的, 并且 C'_i 是比为 l 的 Lipschitz 映射.

现在我们能够应用这些结果研究距离空间里的**测地线** (称长度小于等于有同样端点的所有弧的长度的可求的简单弧为测地线).

定理 11-6 设 E 是一个紧致距离空间, A 和 B 是 E 的两个不交闭子集. 如果存在 E 的端点分别在 A, B 的诸可求长曲线, 而 k 是它们的长度的下确界, 则也存在端点分别在 A, B 的长度为 k 的简单弧.

事实上, 用 l 表示任意一个有限数, 使得 $k < l$. 设 K 是 $\mathscr{C}([0,1],E)$ 的子集, 由比为 l 的 Lipschitz 映射 f 组成, 这里的 f 满足 $f(0)\in A, f(1)\in B$. 这个集合是等连续的并且在 $\mathscr{C}([0,1],E)$ 里是闭集, 根据 Ascoli 定理 (第一章, 第 23 节), 它是紧致的.

推论 11-5 表明 $k = \inf\limits_{f\in K} L(f)$; 于是根据引理 11-3, 存在 $f_0 \in K$ 使得

$$L(f_0) = \inf_{f\in K} L(f) = k.$$

这个映射 f_0 未必是一对一的, 但是利用一个在 $[0,k]$ 上的内蕴参数化将消除这个缺陷:

对于所有 $t\in[0,1]$, 设 $\varphi(t)$ 是 f_0 在 $[0,t]$ 上的全变差. 对于所有 $t_1, t_2 \in [0,1]$, 有

$$d(f_0(t_1), f_0(t_2)) \leqslant |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|. \tag{1}$$

于是关系式 $(\varphi(t_1) = \varphi(t_2))$ 蕴涵 $(f_0(t_1) = f_0(t_2))$, 这表明 f_0 是 φ 的函数, 即 f_0 有形式 $f_0 = g\circ\varphi$. 上面的不等式便可以写成

$$d(g(u_1), g(u_2)) \leqslant |u_1 - u_2|, \quad \text{其中} \quad u_1 = \varphi(t_1), u_2 = \varphi(t_2).$$

于是映射 g 在 $[0,k]$ 上是比为 1 的 Lipschitz 映射; 称 g 是 f_0 的**内蕴参数表示**.

g 的全变差小于等于 k, 而由于

$$g(0) = f_0(0) \in A \quad \text{和} \quad g(k) = f_0(1) \in B,$$

g 的这个全变差大于等于 k; 故它恰好等于 k. 而 g 在任何区间 $[u_1, u_2]$ 上的全变差是 $(u_2 - u_1)$.

我们断言 g 是一对一的; 事实上, 如果存在 u_1, u_2, 满足 $u_1 < u_2$, 使得 $g(u_1) = g(u_2)$, 去掉对应区间 (u_1, u_2) 的弧之后, 得到端点在 A, B 之内的曲线, 其长度将是

$$k - (u_2 - u_1) < k.$$

例 设 Δ 是 $\mathbb{R}^2$ 的闭圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant r^2$; 而 f 是从 Δ 到 $\mathbb{R}$ 内的一个连续映射, E 是 f 的图像. $\mathbb{R}^3$ 的度量子空间 E 同胚于 Δ, 故是紧致的.

如果 f 是 Lipschitz 映射, 则存在一条可求长曲线通过 E 的任意两个点 p 和 q, 这就是连接 p 和 q 在 Δ 上的投影的直线上的线段的像.

于是根据定理 11-6, 有 E 的一条测地线通过 p 和 q.

称 Δ 的内部的像是 E 的**内部**, 称圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 的像为 E 的**边界**. 用 O 表示 Δ 的中心的像.

连接 O 和一个边界点的弧长有一个下确界大于等于 r; 此外, 连接 O 和 q 的测地线的长度当 q 趋于 O 时趋于 0. 由此推出如果 q 取自 O 的一个适当邻域, 所有连接 O 和 q 的测地线在 E 的内部. 故可以叙述:

命题 11-7 *如果 p 是 $\mathbb{R}^3$ 的形如 $z = f(x, y)$ 的 Lipschitz 开曲面 S 的一个点, 对于 S 的充分接近于 p 的所有点 q, 存在一条端点为 p 和 q 的 S 的测地线.*

IV. Stone-Weierstrass 定理

§12. Stone-Weierstrass 定理

这里我们要建立几个定理, 它们表明如果紧致空间上的一个连续的数值函数的族是相当丰富的并且对于某些运算是稳定的, 则它可以一致逼近这个空间上任意连续函数.

设 X 是一个紧致空间, $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 是从 X 到 $\mathbb{R}$ 内的连续映射的代数, 在其上赋以一致收敛的拓扑.

我们说 $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 的一个子集是**格**, 如果对于任何 $f, g \in A$, 包络 $\sup(f, g)$ 和 $\inf(f, g)$ 也属于 A.

引理 12-1 *设 A 是 $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 的一个格.*

函数 $f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 属于 A 的闭包 $\overline{A}$, 等价于对于所有 $x, y \in X$, 和所有 $\varepsilon > 0$,

存在依赖 x, y 的 $g \in A$, 使得

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad |f(y) - g(y)| < \varepsilon.$$

为了表明这个 g 依赖 x 和 y, 把它记做 $g_{x,y}$.

证明 固定 ε. 采用刚引进的记号, 我们有

$$|f(x) - g_{x,y}(x)| < \varepsilon; \quad (1) \qquad |f(y) - g_{x,y}(y)| < \varepsilon. \tag{2}$$

令

$$\omega_{x,y} = \{z : g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}.$$

由于函数 $(g_{x,y} - f)$ 是连续的, 集合 $\omega_{x,y}$ 是开集; 根据关系式 (2), 它含有 y; 于是对于固定的 x, $\omega_{x,y}$ 组成 X 的一个开覆盖; 从这个覆盖中可以抽取一个有限覆盖 (ω_{x,y_i}).

令

$$g_x = \inf_i (g_{x,y_i}),$$

则在 X 内, 有 $g_x < f + \varepsilon$, 并且 $g_x > f(x) - \varepsilon$.

令

$$\omega_x = \{z : g_x(z) > f(z) - \varepsilon\}.$$

由于函数 $(g_x - f)$ 是连续的, 集合 ω_x 是开集, 并且含有 x, 于是 ω_x 组成 X 的一个开覆盖; 从这个覆盖可以抽取一个有限覆盖 (ω_{x_j}).

令

$$g = \sup_j (g_{x_j}),$$

则有

$$g \in A; \quad g < f + \varepsilon \quad \text{并且} \quad g > f - \varepsilon.$$

于是我们找到了函数 $g \in A$, 它逼近 f 的误差小于 ε. □

例 设 X 是 $\mathbb{R}$ 的区间 $[a, b]$, A 是 X 上的连续函数 f 的集合, 这里 f 是分段仿射的 (即存在 X 的一个由区间组成的有限覆盖, 在每个区间上, f 是仿射的). 这个集合 A 显然是格, 而对于所有 x, y, 存在 $f \in A$, 使得 f 在 x, y 取任意给定值.

于是

$$\overline{A} = \mathscr{C}(X, \mathbb{R}).$$

当取 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧致集, 而 A 是 $\mathbb{R}^n$ 里的分片仿射的连续函数 f(即 f 有形式 $f = \sup(g_1, g_2, \cdots, g_p) - \sup(h_1, h_2, \cdots, h_q)$, 其中 g_i 和 h_j 是 $\mathbb{R}^n$ 里的仿射函数) 在 X 上的限制的集合时, 有类似的结果.

引理 12-2 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 的闭子代数是格.

证明 根据关系式

$$\sup(f,g)=\frac{1}{2}[(f+g)+|f-g|];\quad \inf(f,g)=\frac{1}{2}[(f+g)-|f-g|],$$

只需证明, 如果 $f\in A$, 则有 $|f|\in A$.

我们要证明 $|f|$ 是形如 $\sum_1^n a_p f^p$ 的 f 的多项式的一致收敛的极限; 显然可以限于只考虑 $\|f\|\leqslant 1$ 的情形.

对于所有 $\varepsilon>0$, 有

$$0\leqslant (x^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}-|x|\leqslant\varepsilon.$$

另外:

$$x^2+\varepsilon^2=1+\varepsilon^2+(x^2-1)=(1+\varepsilon^2)(1+u),\quad 其中\quad u=(x^2-1)/(1+\varepsilon^2).$$

对于所有 $x\in[-1,1]$, 我们有

$$|u|\leqslant(1+\varepsilon^2)^{-1}<1.$$

于是 $(1+u)^{\frac{1}{2}}$ 的 Taylor 级数① 当 $x\in[-1,1]$ 时一致收敛到 $(1+u)^{\frac{1}{2}}$. 故存在多项式 $P(x)$, 使得对于所有 $x\in[-1,1]$,

$$|(x^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}-P(x)|\leqslant\varepsilon.$$

取 $x=0$ 即得 $|P(0)|\leqslant 2\varepsilon$, 于是如果最后令 $Q=P-P(0)$, 则对于所有 $x\in[-1,1]$ 有

$$|Q(x)-|x||\leqslant\varepsilon+2\varepsilon+\varepsilon=4\varepsilon.$$

由于 Q 没有常数项, 我们有 $Q(f)\in A$; 因为假定了 $\|f\|\leqslant 1$, 故

$$\|Q(f)-|f|\|\leqslant 4\varepsilon.$$ □

定义 12-3 设 A 是从集合 X 到集合 Y 的映射的集合. 说 A **分离** X 的点, 如果对于所有 $x,y\in X$, 只要 $x\neq y$, 就存在 $f\in A$, 使得 $f(x)\neq f(y)$.

例如, 如果 X 是一个距离空间, 则 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 分离 X 的点. 因为如果 $a,b\in X$, 并且 $a\neq b$, 则连续函数 $x\to d(a,x)$ 分离 a 和 b.

我们现在可以陈述所探求的基本定理了.

---

①存在避免用 Taylor 级数的引理 12–2 的证明 (参见习题的 16 题).

定理 12-4 (Stone-Weierstrass 定理) 设 A 是 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 的一个子代数, 满足条件:

1° A 分离 X 的点;

2° 对于所有 $x\in X$, 存在 $f\in A$, 使得 $f(x)\neq 0$.

则

$$\overline{A}=\mathscr{C}(X,\mathbb{R}).$$

证明 1° 首先证明对于所有的 $x,y\in X$, $x\neq y$, 以及所有数值 α,β, 存在 $f\in\overline{A}$, 使得 $f(x)=\alpha$ 和 $f(y)=\beta$. 显然只需对于 A 证明:

如果存在 $g\in A$, 使得 $g(x)\neq g(y)$, 并且 $g(x),g(y)\neq 0$, 令

$$f=a_1g+a_2g^2.$$

存在数值 a_1,a_2 使得 $f(x)=\alpha,f(y)=\beta$, 表示成条件

$$g(x)g^2(y)-g(y)g^2(x)=g(x)g(y)(g(y)-g(x))\neq 0.$$

由假设, 这是满足的.

而这样的 g 确实存在; 因为存在 g_1, 使得 $g_1(x)\neq g_1(y)$; 如果 $g_1(x)$ 和 $g_1(y)\neq 0$, 就取 $g=g_1$. 不然, 例如说 $g_1(x)=0$, 存在 g_2 使得 $g_2(x)\neq 0$, 取 $g=g_1+\varepsilon g_2$, 其中 ε 充分小且不等于 0, 以便仍然有 $g(x)\neq g(y)$ 和 $g(y)\neq 0$.

2° 由假设 A 是代数, 我们有 $\overline{A}$ 也是代数, 因为如果 $f,g\in\overline{A}$, 并且 $f=\lim f_n$,$g=\lim g_n$, 这里 $f_n,g_n\in A$, 于是

$$f+g=\lim(f_n+g_n);\quad \lambda f=\lim(\lambda f_n);\quad fg=\lim f_ng_n,$$

故 $(f+g),\lambda f$ 和 fg 也属于 $\overline{A}$.

3° 既然 $\overline{A}$ 是闭的代数, 根据引理 12-2, 它也是格; 于是根据引理 12-1 和上面 1° 中的性质, 所有 $f\in\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 属于 $\overline{A}$, 故 $\overline{A}=\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$. □

注 1° 在应用中如下表述定理是方便的:

如果 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 的元素族 (f_i) 分离 X 的点, 并且诸 f_i 不在 X 的同一个点全体为零, 则所有 $f\in\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 是关于 f_i 的 (不含常数项) 的多项式的一致收敛的极限.

2° 如果 A 含有非零常数, 定理 12-4 的条件 2 满足.

推论 12-5 设 A 是 $\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ 的一个 (域 $\mathbb{C}$ 上的) 子代数, 满足条件:

1° A 分离 X 的点;

2° 对于所有 $x\in X$, 存在 $f\in A$, 使得 $f(x)\neq 0$;

3° 对于所有 $f\in A$, 有 $\overline{f}\in A$ (这里 $\overline{f}$ 表示 f 的共轭复数).

则

$$\overline{A}=\mathscr{C}(X,\mathbb{C}).$$

事实上, A 的实值函数的 ($\mathbb{R}$ 上的) 子代数 A_r 满足定理 12-4 的条件 1 和 2, 这是因为如果 f 分离 x 和 y, 则 $\mathscr{R}f$ 或者 $\mathscr{R}(if)$ 也分离 x 和 y; 而如果 $f(x) \neq 0$, 则 $\mathscr{R}f(x)$ 或者 $\mathscr{R}(if)(x)$ 也不等于 0.

于是 $\overline{A}_r = \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$; 故 $\overline{A_r + iA_r} = \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$.

Z 这个推论的条件 3 是本质的. 事实上, 取 $\mathbb{C}$ 的单位圆盘作为 X, 而 A 是复变量 z 的多项式在 X 上的迹的集合. 代数 A 满足条件 1 和 2, 但是不满足 3. 可以验证 $A \neq \mathscr{C}(X,\mathbb{C})$, 例如注意到对于所有 $f \in A$, 以至对于所有 $f \in \overline{A}$, $f(0)$ 是 f 在单位圆周上的平均值, 但是这并非对于所有的 $f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ 都成立.

应用 1° 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧致子集; n 个坐标函数 $x \to x_i$ 的族 (f_i) 分离 X 的点. 于是所有函数 $f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ 是 n 个变量的复系数的多项式 (带常数项, 如果 $O \in X$; 无常数项, 只要愿意的话, 如果 $O \notin X$) 的一致收敛的极限.

2° 设 X 是 $\mathbb{C}$ 的单位圆周 $|z| = 1$; 函数 $z \to z$ 分离 X 的点, 并且在 X 上不为零; 于是由 z 和 $\overline{z}$ 生成的代数在 $\mathscr{C}(X,\mathbb{C})$ 内处处稠密. 用 φ 表示从 $\mathbb{R}$ 到 X 内的映射 $t \to e^{it}$. 对于所有 $f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{C}), f \circ \varphi$ 是 $\mathbb{R}$ 上的周期为 2π 的连续函数; 我们知道 (见本书第三章), $\mathbb{R}$ 上的所有周期为 2π 的周期连续函数都是这种形式.[①]

因为 f 是 z 和 $\overline{z}$ 的多项式的一致极限, 故 $f \circ \varphi$ 是 e^{it} 和 e^{-it} 的多项式的一致极限; 换句话说, 所有周期为 2π 的 $\mathbb{R}$ 上的复值连续函数是三角多项式 $\sum\limits_{-n}^{n} a_p e^{ipt}$ 的一致极限.

3° 设 X, Y 是两个紧致距离空间; 用 $\mathscr{C}$ 表示赋范空间 $\mathscr{C}(X \times Y,\mathbb{R})$, 而用 $\mathscr{C}_X$ (对应地,$\mathscr{C}_Y$) 表示由形如 $(x,y) \to g(x)$ (对应地,$h(y)$) 的映射 f 组成的 $\mathscr{C}$ 的子集.

$\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 分离 X 的点, 因为如果 $a, b \in X$, 而且 $a \neq b$, 连续函数 $x \to d(a,x)$ 分离 a 和 b.; 同样, $\mathscr{C}(Y,\mathbb{R})$ 分离 Y 的点. 此外, $X \times Y$ 的两个不同的点, 或者是横坐标不同, 或者是纵坐标不同; 故 $\mathscr{C}_X \cup \mathscr{C}_Y$ 分离 $X \times Y$ 的点. 此外由于这个集合含有函数 1, 故由 $\mathscr{C}_X \cup \mathscr{C}_Y$ 生成的代数 A 在 $\mathscr{C}$ 内处处稠密. 这个代数 A 正是形如

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(y)$$

的函数的集合.

4° 上面的应用 1° 表明 x 的多项式的集合在 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 内处处稠密. 如果令

$$x = e^{-t}, \quad 其中 \quad t \in [0,\infty),$$

就推导出和式 $\sum\limits_{0}^{p} a_n e^{-nt}$ 的集合在赋以一致度量的 $[0,\infty)$ 上的连续函数空间处处稠密, 这些连续函数在无穷远处有极限.

①这是 Fourier 级数理论中熟知的结论. 可参见任何一本这方面的著作. —— 译者注

通过去掉常数 a_0, e^{-kt} (其中 $k=1,2,\cdots$, 或简单地 $k>0$) 的线性组合在赋以一致度量的 $[0,\infty)$ 上的连续函数空间处处稠密, 这些连续函数在无穷远处趋于 0.

连续函数的延拓 设 X 是一个拓扑空间, Y 是 X 的一个闭子集, f 是从 Y 到 $\mathbb{R}$ 内的一个连续映射. 我们提出的问题是能否把 f 延拓为从 X 到 $\mathbb{R}$ 内的一个连续映射. 我们就要看到, 当 X 是可度量的紧致空间时, Stone–Weierstrass 定理不难提供一个答案.

命题 12-6 *设 Y 是紧致距离空间 X 的一个闭子集, 则所有 $f\in\mathscr{C}(Y,\mathbb{R})$ 是 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 的元素在 Y 上的限制.*

证明 1. $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 分离 X 的点 (从而分离 Y 的点), 因为如果 $a,b\in X$, 并且 $a\neq b$, 则连续函数 $x\to d(a,x)$ 分离 a 和 b. 于是定理 12-4 应用到 Y, 表明对于所有 $\varepsilon>0$ 和所有 $g\in\mathscr{C}(Y,\mathbb{R})$, 存在 $g_\varepsilon\in\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$, 使得对于所有 $y\in Y$, 有 $|g_\varepsilon(y)-g(y)|<\varepsilon$. 将进一步假定 g 和 g_ε 有同样的界 (如果 g_ε 不具有这个性质, 就用 $\sup(\alpha,\inf(\beta,g_\varepsilon))$ 代替它, 其中 α 和 β 分别是 g 的下确界和上确界).

2. 用下列条件通过归纳法定义 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 的一个序列 $g^{(n)}$(利用 1° 中的记号):

$$g^{(1)}=f_{\frac{1}{2}};\quad 对于\ n>1, g^{(n)}=(f-\sum_1^{n-1}g^{(i)})_{(\frac{1}{2})^n}.$$

由此推知

$$在\ Y\ 上,\quad |f(y)-\sum_1^n g^{(i)}(y)|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n;\quad 在\ X\ 上,\quad |g^{(n)}(x)|\leqslant(\frac{1}{2})^{n-1}.$$

于是得到: 一方面, 一般项为 $g^{(n)}$ 的级数在 X 上一致收敛; 另一方面, 它的和 g 在 Y 上等于 f. □

V. 定义在 $\mathbb{R}$ 的区间上的函数

在 $\mathbb{R}$ 的区间上存在序结构和仿射结构, 这就允许对于定义在这些区间上的函数定义跟这些结构相结合的概念, 诸如左极限或右极限, 单调性, 可导性, 凸性等概念.

我们就要考察这些概念.

§13. 左、右极限

我们回忆起 (第一章, 第 8 节) 如果 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间, E 是一个分离拓扑空间, 而 f 是从 I 到 E 内的一个映射, 那么说 f 在点 a 有右极限, 是指 $\lim\limits_{\substack{x>a\\x\to a}}f(x)$ 存在.

用 $f(a_+)$ 表示这个极限; 同样的方式可定义 $f(a_-)$.

定义 13-1 如果一方面 $f(a_-)$ 和 f_+ 存在, 另一方面 $f(a_-) = f(a) = f(a_+)$ 不成立, 则说 a 是 f 的**第一类间断点**.

例 1° 从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的映射 $x \to$ (x 的整数部分) 有第一类间断点 $1, 2, \cdots$.

2° $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的映射 f 定义为:

$$f(x) = 0, \quad \text{如果 } x = 0 \text{ 或 } x \text{ 是无理数},$$
$$f(x) = q^{-1}, \quad \text{如果 } x = \text{ (既约分数 } pq^{-1});$$

则所有非零有理点都是第一类间断点.

3° 对于从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 内的如下定义的映射 f: 如果 x 是有理数, 则 $f(x) = 0$, 如果 x 是无理数, 则 $f(x) = 1$. f 没有任何第一类间断点.

如果对于 E 不做任何限制性假设, 下面的例子表明可能 I 的所有的点都是第一类间断点.

用 E 表示乘积集 $\mathbb{R} \times \{1, 2, 3\}$, 赋以如下定义的字典顺序:

对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 有 $(x, 1) < (x, 2) < (x, 3)$, 而对于所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 只要 $x < y$, 对于任意 $i, j \in \{1, 2, 3\}$, 有 $(x, i) < (y, j)$.

给 E 赋以序拓扑, 用 f 表示从 $\mathbb{R}$ 到 E 的映射 $x \to (x, 2)$.

可以验证 E 是局部紧致的, 对于所有 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$f(x_-) = (x, 1) \quad \text{和} \quad f(x_+) = (x, 3).$$

反之, 如果 E 是可度量的, 这样的奇异性不会出现.

命题 13-2 如果 f 是从 $\mathbb{R}$ 的一个区间 I 到距离空间 E 的一个映射, 则 f 的第一类间断点的集合至多是可数集.

事实上, 用 D_n 表示 f 的振幅大于等于 n^{-1} 的间断点的集合.

集合 D_n 仅有孤立点, 因为如果 a 是 D_n 的一个聚点, 则 a 是 D_n 的不同点的一个单调序列的极限, 例如这个序列是递减的, 则 $f(a_+)$ 不可能存在, 故 $a \notin D_n$.

集合 D_n 仅有孤立点, 它至多是可数的; 而 $D = \bigcup D_n$, 故 D 至多是可数集.

Z 存在在所有点间断且没有任何第一类间断点的函数; 上面的例 3 就是这种情形.

定义 13-3 设 f 是从 $\mathbb{R}$ 的一个区间 I 到一个距离空间 E 的一个映射.

1° 如果 f 仅有第一类间断点, 则说 f 是**正规的**.

2° 如果存在 I 的子区间 (可能退化为一个点) 组成的一个有限划分, 在它的每个子区间上, f 取常值, 则说 f 是**阶梯函数**.

命题 13-2 表明正规函数的间断点的集合至多是可数的, 又显然阶梯函数是正规的. 但其逆命题不成立, 因为连续函数都是正规的.

命题 13-4 正规函数对于一致极限是稳定的.

事实上, 设 f 是正规函数 f_n 的一致极限; 对于所有 $a \in I$, $f_n(a_+)$ 和 $f_n(a_-)$ 存在, 故 $f(a_+)$ 和 $f(a_-)$ 也存在.

注意如果距离空间 E 是一个赋范向量空间, 则 $\mathscr{F}(I,E)$ 的正规函数的集合是 $\mathscr{F}(I,E)$ 的一个向量子空间.

命题 13-5 假定区间 I 是紧致的, E 是任意距离空间. 则正规函数的类和阶梯函数一致极限的类相等.

证明 由于所有阶梯函数是正规的, 命题 13-4 表明所有阶梯函数的一致极限也是正规的.

反之, 假定 f 是正规的, 设 ε 是一个大于 0 的数. 对于所有 $x \in I$, 存在两个非空区间 (α_x, x) 和 (x, β_x), 使得在它们的每一个上 f 的振幅小于 ε. 由于 I 是紧致的, 存在 I 的由形如 (α_x, β_x) 的区间组成的一个有限覆盖, 于是存在 I 的一个由区间 I_n 组成的有限划分, 个别区间可能退化为一个点, 在每个区间上 f 的振幅小于 ε. 在每个区间 I_n 上取跟 f 在 I_n 的中点的值重合的常值的函数 f_ε 显然逼近 f 的误差小于 ε. □

推论 13-6 从紧致的区间 I 到距离空间 E 的所有正规映射是有界的.

§14. 单调函数

如果 f 是从一个区间 I 到 $\mathbb{R}$ 内的一个递增映射, 对于所有 $a \in I$,

$$f(a_-) = \sup_{x<a} f(x); \quad f(a_+) = \sup_{x>a} f(x).$$

故所有**递增函数** (同样, 所有递减函数) 是一个**正规函数**; 特别的结论是: 它的间断点的集合至多是可数的.

于是两个递增函数的差, 即所有有界变差函数 (第一章, 命题 24-10) 是正规的. 这个结果可能让我们期望所有正规数值函数是有界变差的; 根本不是这样的, 因为存在 $[0,1]$ 上的连续函数其变差是无界的.

例 熟悉几个看似有悖常理的递增函数的经典例子是有益的, 它们可以看作我们数学研究园地的篱笆.

1° 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 是开区间 $(0,1)$ 的可数点集, 使得 $\overline{A} = [0,1]$, 而 (α_n) 是大于 0 的数的无穷序列, 其和为 1.

对于所有 $x \in [0,1]$, 令

$$f(x) = \sum_{\alpha_n < x} \alpha_n,$$

换句话说, 对所有使得 $\alpha_n < x$ 的 n 求和. 直接验证得到 f 在 $[0,1]$ 严格递增, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 并且间断点的集合就是 A.

2° 现在令 $f([0,1]) = B$, 这里的 f 就是前一个例子中定义的函数. 从 B 到 $[0,1]$ 上的映射 f^{-1} 是严格递增的; 可以验证:

a) f^{-1} 以唯一的方式延拓为从 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的递增映射 g;

b) g 是连续的;

c) $[0,1]$ 的 g 取常数的区间的长度的和等于 1, 这导致 g 的变差产生于一个 "零测度" 集合, "零测度" 的意义将在积分论中阐明.

§15. 有限增量定理

这里我们不打算复习一元实变量的函数的导数的基本性质. 不过要证明几个有关 "有限增量" 的定理, 这让我们回味从局部到整体的推理模式, 并且将显著拓广经典的有限增量定理①, 它原来只是对于实变量的可导函数才有效的.

在以下的叙述中, I 表示 $\mathbb{R}$ 的一个任意区间, 而 D 是 I 的一个有限或者可数子集; 在经典的叙述中, 它通常是空集或者是退化为 I 的端点.

引理 15-1　*设 f 是从 I 到 $\mathbb{R}$ 的一个连续映射, 使得对于 I 的所有不属于 D 的内点 x, 和所有 $\delta > 0$, 存在 $y \in (x, x+\delta)$, 使得 $f(x) \leqslant f(y)$. 则 f 在 I 里递增.*

证明　设 $u, v \in I$, 且有关系式 $u < v$, 而 k 是任意一个使得

$$k < f(u), \quad k \notin f(D)$$

的数. 用 A 表示使得 $k \leqslant f(x)$ 的 $x \in [u,v]$ 的集合; 这个集合不是空集, 因为它含有 u; 它是闭集, 因为 f 是连续的; 故它含有数 $\alpha = \sup A$.

假定 $\alpha < v$; 不可能有 $k < f(\alpha)$, 否则, α 将是 A 的内点; 故 $k = f(\alpha)$. 必有 $\alpha \notin D$, 因为 $f(\alpha) = k \notin f(D)$; 于是根据引理的假设, 存在 $\beta \in (\alpha, v)$, 使得 $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$; 故 $\beta \in A$, 这与 $\alpha = \sup A$ 矛盾.

故有 $\alpha = v$, 即 $k \leqslant f(v)$; 由于 $f(D)$ 至多是可数的, 存在任意接近于 $f(u)$ 的 k, 故 $f(u) \leqslant f(v)$.

换句话说, f 是递增的. □

引理 15-2　*设 φ 是从 I 到一个距离空间 E 的连续映射, 而 g 是从 I 到 $\mathbb{R}$ 的一个递增连续映射.*

①在我国的数学分析课本中, 更常用的名称是 "中值定理", 或 "Lagrange 定理". ——译者注

假定对于 I 的所有不属于 D 的内点 x, 和所有 $\delta > 0$, 存在 $y \in (x, x+\delta)$, 使得

$$d(\varphi(y), \varphi(x)) \leqslant g(y) - g(x). \tag{1}$$

则对于所有 $u, v \in I$, 只要 $u < v$, 就有

$$d(\varphi(v), \varphi(u)) \leqslant g(v) - g(u).$$

事实上, 给定 u 和 v, 令

$$\text{对于所有} x \in [u, v], \quad f(x) = g(x) - d(\varphi(u), \varphi(x)).$$

对于所有 $x, y \in [u, v]$, 设 $x < y$, 并且 (1) 成立, 则有

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= g(x) - g(y) + d(\varphi(u), \varphi(y)) - d(\varphi(u), \varphi(x)) \\ &\leqslant g(x) - g(y) + d(\varphi(y), \varphi(x)) \leqslant 0. \end{aligned}$$

根据引理 15-1, f 在 $[u, v]$ 上是递增的; 故

$$0 \leqslant f(v) - f(u), \text{即 } d(\varphi(u), \varphi(v)) \leqslant g(v) - g(u).$$

为了回归更具古典特色的表述, 我们给出一个定义.

定义 15-3 设 φ 是从 I 到赋范空间[①] E 的一个映射. 如果当 h 保持大于 0 趋于 0 时, E 的元素 $h^{-1}(\varphi(a+h) - \varphi(a))$ 趋于一个极限, 则说 φ 在 I 的点 a (它不是 I 的右端点) 是**右可导的**. 称这个极限为 φ 在 a 的右导数, 并且记做 $\varphi'_d(a)$.

由定义得到

$$\Delta\varphi = \varphi(a+h) - \varphi(a) = h(\varphi'_d(a) + \varepsilon(h)), \quad \text{其中} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

故对于所有 $\varepsilon > 0$, 当 h 是充分小的正数时, 有

$$h(\|\varphi'_d(a)\| - \varepsilon) \leqslant \|\Delta\varphi\| \leqslant h(\|\varphi'_d(a)\| + \varepsilon).$$

特别推出 φ 在 a 是右连续的.

同样可定义左可导的; 如果 φ 在点 a 是左可导的和右可导的, 且两个导数相等则说 f 在 a 是可导的.

定理 15-4 设连续数值函数 φ 在 $I \diagdown D$ 的所有点是右可导的, 并且对于所有 $x \in I \diagdown D$ 有 $m \leqslant \varphi'_d(x) \leqslant M$, 则

$$\text{对于} u < v, \quad m(v-u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \leqslant M(v-u).$$

当 f 在 $[u, v]$ 上不是仿射函数时, 不等式是严格的.

[①] 对于赋范空间的定义, 参见第三章 2-1 和 4-1.

证明　首先证明, 如果对于所有 $x \notin D$ 有 $\varphi_d'(x) \geqslant 0$, 则 φ 是递增的. 事实上, 给定 $\varepsilon > 0$, 对于所有 $x \notin D$, 一旦正数 h 充分小, 就有

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) \geqslant -\varepsilon h.$$

于是函数 $f : x \to \varphi(x) + \varepsilon x$ 满足引理 15-1 的条件; 从而它是递增的; 由于这对于所有 $\varepsilon > 0$ 成立, φ 也是递增的.

而函数 $\varphi_1 : x \to Mx - \varphi(x)$ 和 $\varphi_2 : x \to \varphi(x) - mx$ 在 $I \diagdown D$ 的点有右导数大于等于 0, 故它们是递增的. 由此便得所求的联立不等式成立.

最后, 如果 f 在 $[u, v]$ 上不是导数为 M 的仿射函数, 则递增函数 $(Mx - \varphi(x))$ 在 $[u, v]$ 上是不是常数, 故

$$Mu - \varphi(u) < Mv - \varphi(v).$$

对于 $\varphi(x) - mx$ 的论证是一样的. □

定理 15-5　*设 φ 是从 I 到一个赋范空间 E 内的连续映射, g 是从 I 到 $\mathbb{R}$ 的一个递增连续映射.*

假定 f 和 g 在 $I \diagdown D$ 是右可导的, 并且

$$\|\varphi_d'(x)\| \leqslant g_d'(x).$$

则对于所有 $u, v \in I$, 只要 $u < v$, 就有

$$\|\varphi(v) - \varphi(u)\| \leqslant g(v) - g(u).$$

证明　给定一个数 $\varepsilon > 0$; 对于 I 的所有不属于 D 的内点 x, 存在任意小的 $h > 0$, 使得

$$\begin{aligned}\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| &\leqslant h(\|\varphi_d'(x)\| + \varepsilon) \\ &\leqslant h(g_d'(x) + \varepsilon) \leqslant g(x+h) - g(x) + 2h\varepsilon.\end{aligned}$$

把引理 15-2 应用到函数 φ 和 $x \to g(x) + 2\varepsilon x$, 便得到

$$\|\varphi(v) - \varphi(u)\| \leqslant g(v) - g(u) + 2\varepsilon(v - u).$$

这个不等式对于所有 $\varepsilon > 0$ 皆成立, 故得要证明的不等式. □

推论 15-6　*假设对于 $x \in I \diagdown D$ 有 $\|\varphi_d'(x)\| \leqslant M$ 成立, 则在 I 上 φ 是比为 M 的 Lipschitz 映射.*

推论 15-7　*假设 f 是从 I 到赋范空间 E 的连续映射, 在 $I \diagdown D$ 的所有点是右可导的, 又设 $u \in E$.*

如果对于所有 $x \in I \diagdown D$ 有 $\|f_d'(x) - u\| \leqslant \varepsilon$, 则对于所有 $a, b \in I$ 有

$$\|f(b) - f(a) - (b - a)u\| \leqslant \varepsilon(b - a).$$

为了确信它, 只需对于由 $\varphi(x) = f(x) - xu$ 定义的 φ 应用推论 15-6.

1° 所有我们刚确立的命题涉及的都是定义在 $\mathbb{R}$ 的区间 I 上的函数. 后面我们将看到这些命题中的一些可以推广到 I 换成 $\mathbb{R}^n$ 的凸集的情形, 用到的是这样的事实: 凸集的任意两个点是包含于此凸集的直线段的端点.

但是我们就要用下面的例子说明不可能把 I 换成一般的距离空间:

设 J 是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 的如下定义的子集: J 是两个直线区间 $[(1,0),(0,k)]$ 和 $[(-1,0),(0,k)]$ 的并集.

定义从 J 到 $\mathbb{R}$ 的映射 φ 为线性型 $(x_1, x_2) \to kx_1$ 在 J 的限制.

容易验证如果给 J 赋以欧几里得距离, φ 在 J 的每个点的邻域里是比为 1 的 Lipschitz 映射. 然而设 k' 使得 φ 是比为 k' 的 Lipschitz 映射, 这样的 k' 的最小者是 k, 而 k 可以取得任意大.

2° 引理 15-1 的证明仅用到 $f(D)$ 不包含任何区间这个事实; 故可能期望扩大出现在命题陈述中的集合 D 的类. 但是有确切的例子告诉我们, 这类推广既不方便应用, 又没有多少意义: 这仍然是在 13-5 构造的递增连续函数 g, 它除了在一个 "零测度" 的闭集的点上外, 处处有零导数, 从而导数小于等于 0, 但它是递增的, 并且不是常数.

3° 所有我们的表述都让右导数居于优先地位; 显然可以在这些表述里用左导数置换右导数. 此外, 一般说来, 所研究的函数在 $I \setminus D$ 的所有点有双侧导数.

§16. 凸函数的定义. 直接性质

在第 8 节我们曾经领略到 "上包络" 对于创建新的函数类的重要性; 涉及凸函数时它再次出现, 凸函数就是仿射函数的上包络. 我们将使用凸集概念[①].

定义 16-1 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 的区间 I 上的**有限数值函数**.

如果对于所有 $x_1, x_2 \in I$, 所有 $x \in [x_1, x_2]$, f 的图像 Γ 的点 $M(x)$ 在线段 $M(x_1)M(x_2)$ 下方 ($M(x)$ 表示点 $(x, f(x))$); 即对于所有满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 的 $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$, 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

则说 f 是**凸的**.

例如, 所有仿射函数 $x \to ax + b$ 是凸的.

命题 16-2 f 是凸的等价于平面 R^2 中 f 的图像的上方的点的集合 $A(f)$ 是凸集.

① 我们简单地复习: $\mathbb{R}$ 上的向量空间的子集 X 是**凸集**, 如果对于所有 $x, y \in X$, 直线段 $[x, y]$ 包含于 X.

事实上, 如果 f 是凸的, 假设 P_1 和 P_2 是 $A(f)$ 的横坐标分别为 x_1 和 x_2 的两个点, 线段 $M(x_1)M(x_2)$ 在 Γ 的上方, 因为 P_1 和 P_2 分别在 $M(x_1)$ 和 $M(x_2)$ 的上方, 于是线段 P_1P_2 也在 Γ 上方.

反之, 设 $A(f)$ 是凸集, 如果 $M(x_1)$ 和 $M(x_2)$ 是 Γ 的两个点, 这两个点属于 $A(f)$; 故线段 $M(x_1)M(x_2)$ 包含于 $A(f)$, 从而在 Γ 的上方.

定义 16-3 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 的区间 I 上的有限数值函数. 如果对于所有 $x_1, x_2 \in I$, 所有 $x \in (x_1, x_2)$, f 的图像的点 $M(x)$ **严格**在线段 $M(x_1)M(x_2)$ 下方, 则说 f 是**严格凸的**.

这等价于说 f 是凸的, 并且 f 的图像 Γ 不包含三个共线的点. 不然, 设 M_1, M_2, M_3 是 Γ 的三个共线的点, 它们的横坐标 x_1, x_2, x_3 满足关系 $x_1 < x_2 < x_3$, 对于所有 $x \in [x_1, x_3]$, 点 $M(x)$ 在线段 M_1M_3 上; 这将有 x, 例如说 $x_1 < x < x_2$, 使得 $M(x)$ 严格在 M_1M_2 的下方, 这就蕴涵 M_2 严格在 $M(x)M_3$ 的上方, 而这是不可能的.

故 f 在 I 是严格凸的, 等价于 f 是凸的, 并且不存在 I 的开区间, 使得 f 在其上是仿射的.

定义 16-4 说定义在 $\mathbb{R}$ 的区间 I 上的有限数值函数 f 是**凹的**, 如果 $(-f)$ 是凸的.

这就相当于说在 f 的图像下方的点的集合是凸集.

命题 16-5 (凸函数的运算) a) 凸函数的所有正系数的线性组合是凸函数.
b) 凸函数的所有简单极限是凸函数.
c) 凸函数的有限上包络是凸函数.

证明 断言 a) 和 b) 由不等式

$$f_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f_i(x_1) + \alpha_2 f_i(x_2)$$

推出, 不等式对于正线性组合和简单极限是保持的.

为了证明 c), 设 (f_i) 是凸函数的一个族, 其上包络是 f(根据假设, 它是有限的). 每个集合 $A(f_i)$ 是凸集, 我们知道 $A(f) = \bigcap_i A(f_i)$, 故 $A(f)$ 是凸集. 换句话说, f 是凸函数. □

推论 16-6 如果 I 上的有限数值函数是仿射函数的上包络, 则它是凸函数.

§17. 凸函数的连续性和可导性

命题 17-1 f 是凸函数等价于函数 p:

$$p(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad (\text{其中} x \neq y)$$

对于每个变量是递增的.

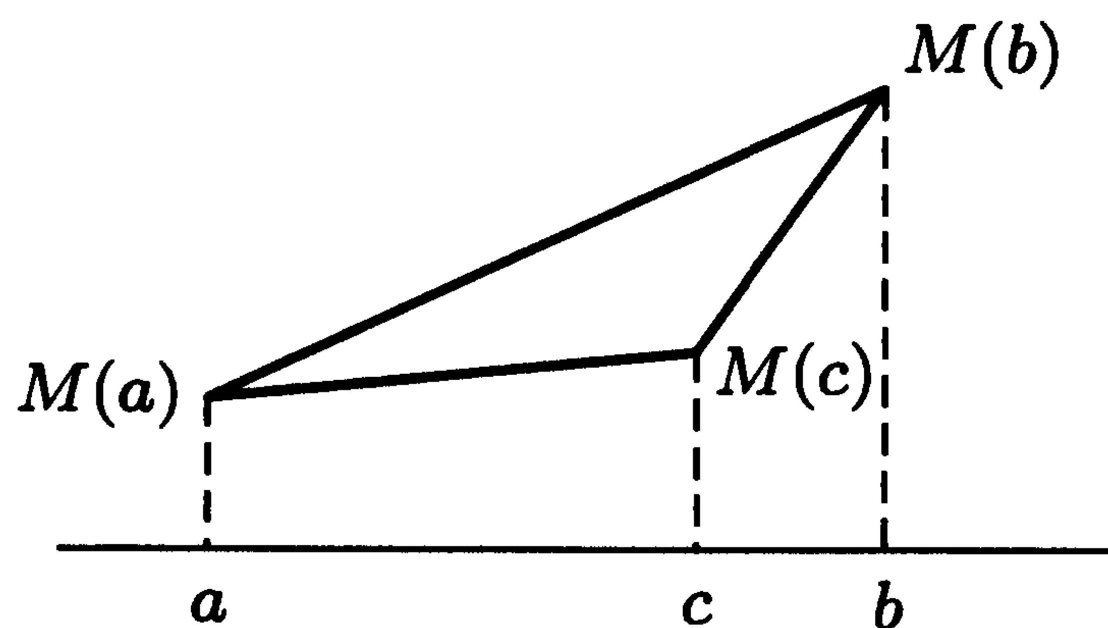


图 7

事实上, $p(x,y)$ 是直线 $M(x)M(y)$ 的斜率 (图 7), 而所陈述的条件等价于说: 如果 a,b,c 是 I 的三个点, 满足 $a<c<b$, 则

$$M(a)M(c)\text{的斜率} \leqslant M(a)M(b)\text{的斜率} \leqslant M(c)M(b)\ \text{的斜率},$$

而这归结为 $M(c)$ 在线段 $M(a)M(b)$ 的下方.

推论 17-2 *f 既是凸的又是凹的, 等价于 f 是仿射的.*

我们注意到 f 是凹的等价于斜率 p 是递减的.

故 f 既是凸的又是凹的等价于 p 是一个常数, 于是得到

$$f(x)-f(y)=k(x-y).$$

故 f 是仿射的. 逆命题显然成立.

命题 17-3 *在一个开区间上的所有凸函数 f 在所有点有左导数和右导数 (从而是连续的), 并且如果 $a<b$, 则有*

$$f_g'(a) \leqslant f_d'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f_g'(b) \leqslant f_d'(b).$$

证明 设 $x<a<y$, 令

$$p(t)=(f(t)-f(a))/(t-a).$$

命题 17-1 表明 $p(x)\leqslant p(y)$.

于是 $p(y)$ (其中 $a<y$) 的下确界是有限的, 并且等于 $\lim\limits_{y\to a}p(y)$; 同样有 $p(x)$(其中 $x<a$) 的上确界是有限的, 并且等于 $\lim\limits_{x\to a}p(x)$. 故 $f_d'(a)$ 和 $f_g'(a)$ 都存在, 并且有

$$p(x)\leqslant f_g'(a)\leqslant f_d'(a)\leqslant p(y).$$

令 $y=b$ 就得到要找的一部分不等式; 其余的交换 a 和 b 的地位即得. □

1° 在闭区间 $[a,b]$ 上的凸函数在端点有可能不是连续的; 比如说, 在 $[0,1]$ 内部等于 0, 而在端点等于 1 的函数 f, 它在 $[0,1]$ 是凸的, 但是在端点不是连续的.

2° 在有界开区间上的凸函数可能不是有界的; 在区间 $(-1,1)$ 上的函数 $(1-x^2)^{-1}$ 就是这种情况.

3° 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续并且凸的函数在端点可能不是可导的; 例如函数 $-(1-x^2)^{1/2}$ 在 $[-1,1]$ 上就是这种情况. 不过在 -1 有广义导数 $-\infty$, 而在 1 有广义导数 $+\infty$.

推论 17-4 *函数 f'_g 和 f'_d 是递增的, 并且 I 的 f 不可导的点的集合至多是可数的.*

证明 举例来说, f'_g 的递增性就体现在命题 17-3 的不等式中. 从那里的不等式还看出: 如果 $a<b$, 则区间 $(f'_g(a), f'_d(a))$ 和 $(f'_g(b), f'_d(b))$ 是不相交的. 故这样的非空区间至多是可数无穷的; 换句话说, 使得 $f'_g(x) \neq f'_d(x)$ 的点 x 的集合至多是可数的. □

定义 17-5 *设 f 是开区间 I 上的一个图像是 Γ 的凸函数. 所有过点 $M(a)$ 并且位于 Γ 下方的直线 Δ 称为 Γ 在点 $M(a)$ 的***支撑直线***.*

命题 17-6 *在开区间上的凸函数的图像的任何一点, 至少存在一条支撑直线.*

事实上, 命题 17-3 的不等式表明, 为了 Δ 是在 $M(a)$ 的支撑直线, 必须并且只需它的斜率 p 满足

$$f'_g(a) \leqslant p \leqslant f'_d(a).$$

特别地, 如果 f 在 a 是可导的, 则 Γ 在 $M(a)$ 的唯一的支撑直线是切线.

推论 17-7 *一个开区间上的任何凸函数是一族仿射函数的上包络.*

事实上, 只需取其图像是 f 的图像的支撑直线的仿射函数全体作为仿射函数族. 这个推论是推论 16-6 的逆命题.

§18. 凸性准则

命题 17-1 已经提供了凸性的一个方便的判别准则; 这里是另外几个.

命题 18-1 *设 f 是开区间 I 上的一个有限数值函数, 而 D 是 I 的一个至多可数的子集. 为了 f 是凸的, 必须且只需 f 是连续的, 在 $I \setminus D$ 的所有点有右导数 f'_d, 并且 f'_d 在 $I \setminus D$ 是递增的.*

证明 根据推论 17-4, 我们已经知道条件是必要的. 反之, 假定条件满足. 设

a, b, c 是 I 的三个点, 并且 $a < b < c$; 令

$$k_1 = \sup_{x \leqslant b} f'_d(x) \quad 和 \quad k_2 = \inf_{x \geqslant b} p f'_d(x).$$

定理 15-4 表明

$$f(b) - f(a) \leqslant k_1(b - a) \quad 和 \quad k_2(c - b) \leqslant f(c) - f(b).$$

由于 $k_1 \leqslant k_2$, 我们有

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

这个关系表明 $M(b)$ 在 $M(a)M(c)$ 的下方. 故 f 是凸的. □

推论 18-2 *如果 f 在开区间 I 的所有点有二阶导数 f'', 则 f 是凸的等价于 $f'' \geqslant 0$.*

现在这里有一个准则允许我们从局部过渡到整体.

命题 18-3 *设 f 是开区间 I 上的有限数值函数, 如果 I 的任意点是 f 在其上是凸的一个区间的内点, 则 f 在 I 上是凸的.*

事实上, 局部凸性导致在 I 的每个点 f'_d 存在, 并且是局部递增的. I 的任一区间 $[u, v]$ 可以用有限个开区间覆盖, 在每个开区间上 f'_d 是递增的; 由此立刻得到 $f'_d(u) \leqslant f'_d(v)$; 于是 f'_d 在 I 是递增的. 根据命题 18-1, f 是凸的.

最后一个准则几乎仅有点历史的意义:

命题 18-4 *设 f 是开区间 I 上的有限连续的 (或仅是下半连续的) 数值函数. 如果对于所有 $a, b \in I$ 有*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(a) + f(b)),$$

则 f 是凸的.

证明 在 I 内任意取点 a, b, 其中 $a < b$; 设直线 $M(a)M(b)$ 的方程是 $y = d(x)$. 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leqslant d(x)$ 不成立, 则 $[a, b]$ 的使得 $f(x) > d(x)$ 的点 x 的集合 ω 将不是空集, 并且由于 $(f - d)$ 是下半连续的, 这个集合是开集. 设 (α, β) 是 ω 的一个连通分支; 则在 (α, β) 上有 $f(x) > d(x)$, 而在 $x = \alpha$ 和 $x = \beta$ 有 $f(x) - d(x) \leqslant 0$. 于是有

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > d\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}(d(\alpha) + d(\beta)) \geqslant \frac{1}{2}\left(f(\alpha) + f(\beta)\right),$$

于是有

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{1}{2}\left(f(\alpha) + f(\beta)\right),$$

这与假设矛盾. □

Z 存在 $\mathbb{R}$ 上的这样的处处间断的函数, 它对于任何实数 x, y 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$[①]; 这样的函数满足命题 18-4 中的不等式, 但它不是凸的, 否则, 它将连续.

§19. 向量空间的子集上的凸函数

命题 16-2 的凸性准则启发我们对数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间的子集上的数值函数有一个定义凸性的方便手段.

定义 19-1 设 f 是定义在 ($\mathbb{R}$ 上的) 向量空间 E 的子集 X 上的有限数值函数. 如果向量空间 $E \times \mathbb{R}$ 的位于 f 的图像的上方的点的集合 $A_X(f)$ 是凸的, 则说 f 是凸的.

命题 19-2 为了定义在 ($\mathbb{R}$ 上的) 向量空间 E 的子集 X 上的有限数值函数 f 是凸的, 必须且只需 X 是凸的, 并且 f 在 X 的所有线段上的限制是凸的.

证明 条件是必要的, 因为如果 f 是凸的, 则集合 $A_X(f)$ 是凸集, 从而 X 作为 $A_X(f)$ 在 E 上的投影, 也是凸集. 另外, 对于任何 (直) 线段 $I \subset X$, 集合 $A_I(f)$ 是 $A_X(f)$ 与凸集 $I \times \mathbb{R}$ 的交集, 故 $A_I(f)$ 是凸集.

条件是充分的, 因为设 P_1 和 P_2 是 $A_X(f)$ 的两个点, 而 p_1 和 p_2 是它们在 X 上的投影. 如果 f 在线段 $I = [p_1 p_2]$ 上的限制是凸的, 线段 $[P_1 P_2]$ 包含于 $A_I(f)$ 中, 当然也包含于 $A_X(f)$ 中. □

许多对于实单变量凸函数确立的命题立刻推广到一般的凸函数. 尤其是, 系数大于等于 0 的凸函数的线性组合, 凸函数的极限, 凸函数的上包络, 都是凸函数.

如果我们限制在定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开凸子集 X 上的凸函数, 另外的一些性质也可以推广. 例如, 这样的 f 是连续的, 并且在 f 的图像的每个点, 至少存在一个支撑超平面. 我们不证明这后两个性质.

命题 19-3 如果 f 是凸的, 则集合 $\{x : f(x) \leqslant 0\}$ 是凸的.

更一般地, 如果 f 是凸的, 而 g 是凹的, 则集合 $\{x : f(x) \leqslant g(x)\}$ 是凸的.

事实上, 如果 f 是凸的, 且 $f(a) \leqslant 0, f(b) \leqslant 0$, 则对于 $x \in [a, b]$ 有 $f(x) \leqslant 0$; 故所研究的集合是凸的.

第二个断言由第一个推出, 只需注意到 $(f - g)$ 是凸的.

对于集合 $\{x : f(x) < g(x)\}$ 有一个类似的断言.

[①] 这种函数也是第一章第 14 节上所要求的例子. 其作法如下: 首先把 $\mathbb{R}$ 看作 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间, $\{r_\alpha\} \subset \mathbb{R}$ 为这一向量空间的代数基 (它的存在需要选择公理, 参看第三章习题 68 题). 则每一 $x \in \mathbb{R}$ 可唯一表示为 $x = \sum_\alpha p_{\alpha x} r_\alpha$, 其中 $p_{\alpha x} \in \mathbb{Q}$, 且只有有限个不为零. 令 $f(x) = \sum_\alpha p_{\alpha x}$. 则 f 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且由于它只取有理值, 不可能连续. ——译者注

例 在 $\mathbb{R}^n$ 里, 由 $\sum x_p^2/a_p^2 \leqslant 1$ 定义的椭球体是凸的.

同样, 当 $\alpha_i \geqslant 0$ 时, $\mathbb{R}^n$ 的使得 $\sum \alpha_i \|x - a_i\| \leqslant 1$ 的 x 的集合是凸的.

命题 19-4 设 X (对应地, Y) 是向量空间 E (对应地, F) 的凸子集; 而 f 是 Y 上的凸函数, φ 是从 X 到 Y 内的仿射映射. 则 $f \circ \varphi$ 是 X 上的凸函数.

这是关系式

$$\text{当 } \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \text{ 时}, \quad \varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \varphi(x_1) + \alpha_2 \varphi(x_2)$$

的直接推论.

例 设 f 是 Y 上的凸函数, 由 $(x, y) \to f(x - y)$ 定义的 Y^2 上的函数是凸函数, 这是因为映射 $(x, y) \to x - y$ 是线性的.

定义 19-5 (正齐次的凸函数) 设 f 是定义在 ($\mathbb{R}$ 上的) 向量空间 E 的子集 X 上的数值函数. 如果 X 是以 O 为顶点的凸锥, 并且对于所有 $x \in X$ 和所有 $\lambda \geqslant 0$, 有 $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, 则说 f 是**正齐次的**.

命题 19-6 设 f 是定义在 ($\mathbb{R}$ 上的) 向量空间 E 的凸锥 X 上的正齐次的有限数值函数.

1° 为使 f 是凸函数, 必须且只需对于任意 x_1 和 $x_2 \in X$, 有 $f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2)$.

2° 当 $f \geqslant 0$ 时, 为使 f 是凸的, 必须且只需 X 的使得 $f(x) \leqslant 1$ 的点 x 的集合是凸的.

证明 1° 设 f 是凸的, 则对于所有 $x_1, x_2 \in X$, 有

$$f(x_1 + x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant 2\left[\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right] = f(x_1) + f(x_2).$$

反之, 设对于所有 $u_1, u_2 \in X$ 有 $f(u_1 + u_2) \leqslant f(u_1) + f(u_2)$, 那么对于所有 $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant f(\alpha_1 x_1) + f(\alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

故 f 是凸的.

2° 把 X 的使得 $f(x) \leqslant 1$ 的 x 的集合记做 B.

如果 f 是凸函数, 则命题 19-3 表明 B 是凸集. 反之, 假定 $f \geqslant 0$ 且 B 是凸集.

如果 $x_1, x_2 \in X$, 并且 $k_1 > f(x_1), k_2 > f(x_2)$, 则有

$$k_1^{-1} x_1 \in B \quad \text{和} \quad k_2^{-1} x_2 \in B.$$

由于 B 是凸集, 故这两个点的分别带权 k_1 和 k_2 的重心 $(k_1+k_2)^{-1}(x_1+x_2)$ 属于 B; 故有

$$\text{当 } k_1 > f(x_1) \text{ 和 } k_2 > f(x_2) \text{ 时}, \quad f(x_1+x_2) \leqslant k_1+k_2.$$

由于每个 k_i 可以任意接近 $f(x_i)$, 故

$$f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

从而 f 是凸的. □

例 对于任何数值 $\alpha > 0$, 函数 f

$$(x_p) \to \left(\sum |x_p|^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 是正齐次的. 而如果 $\alpha \geqslant 1$, 每个函数 $|x_p|^\alpha$ 是凸的, 故 f^α 是凸的, 随之集合 $\{x : f(x) \leqslant 1\}$ 是凸集; 故 f 是凸函数.

二次可微的凸函数 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开凸集 X 上的数值函数. 假定 f 有连续的二阶偏导数.

对于所有 $a \in X$ 和所有 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 映射 $\varphi : t \to f(a+t\alpha)$ 在 $\mathbb{R}$ 的一个含有 0 的开区间上有二阶导数:

$$\varphi''(0) = \sum \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

而 f 的凸性等价于它在 X 的线段上的限制的凸性, 即函数 φ 的凸性. 后者由对于所有 a, α 都成立的关系式 $\varphi''(0) \geqslant 0$ 表达 (推论 18-2); 于是可以表述:

命题 19-7 *为使定义在 $\mathbb{R}^n$ 的开凸子集 X 上的有连续二阶偏导数的数值函数 f 是凸的, 必须且只需对于所有 $a \in X$, 二次型*

$$\sum \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \geqslant 0.$$

Z 1° 必须注意关系式 $\partial^2 f/\partial x_i^2 \geqslant 0$ 对于 f 的凸性一点儿也不充分. 例如, 函数 $(x^2+3xy+2y^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的任何开凸集上都不是凸的.

2° 如果 f 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个非凸的开集 X 上满足命题 19-7 的条件, 则它在 X 的所有开凸集上是凸的, 但是通常不能延拓为包含 X 的一个凸集上的凸函数.

用下列例子验证这个事实. 如果 X 是 $\mathbb{R}^2$ 的由

$$X = \{(x,y) : y < 4x^2\}$$

定义的开集. 函数 $(y-x^2)^2+x^4$ 在 X 的所有点的一个邻域内是凸的, 但是没有到 $\mathbb{R}^2$ 的凸的延拓.

§20. 单调函数的相对平均值

分析, 即使是初等分析, 也会用到各种平均, 诸如算术、几何、二次和调和等平均. 这里我们推广这些初等概念, 并且在凸性的基础上, 使得这类不等式变得显然.

为了行文简便, 我们这里把任何有限族 $\mu=(\alpha_i,x_i)_{i\in I}$ 叫做集合 E 上的**离散测度**, 其中 $x_i\in E$, 而 α_i 是一个大于 0 的数. 我们说 μ 被 E 的子集 X 承载, 如果 X 包含所有的点 x_i.

μ 的总质量是数 $\|\mu\|=\sum\alpha_i$. 如果 φ 是从 E 到另一个集合 F 内的一个映射, 而 $\mu=(\alpha_i,x_i)_{i\in I}$ 由 E 承载, 称 F 上的测度 $\varphi(\mu)=(\alpha_i,\varphi(x_i))_{i\in I}$ 为 μ 在 φ 下的像. 显然有 $\|\varphi(\mu)\|=\|\mu\|$.

如果 E 是一个向量空间, μ 的重心是 E 的点 $\|\mu\|^{-1}\sum\alpha_ix_i$, 把它记做 $\mathscr{M}_1(\mu)$; 对于所有数值 $k>0$, 测度 $k\mu=(k\alpha_i,x_i)_{i\in I}$ 跟 μ 有同样的重心; 特别地, 取 $k=\|\mu\|^{-1}$, 测度 $k\mu$ 有总质量 1, 这有时候会方便些.

重心 $\mathscr{M}_1(\mu)$ 属于承载 μ 的所有凸集; 在 $E=\mathbb{R}$ 的特殊情形下, 总有

$$\inf(x_i)\leqslant\mathscr{M}_1(\mu)\leqslant\sup(x_i).$$

定义 20-1 设 f 是 $\mathbb{R}$ 的区间 A 上的一个严格单调的连续数值函数; 而 $\mu=(\alpha_i,x_i)_{i\in I}$ 是 A 上的一个离散测度; 用 f^{-1} 表示 f 的逆函数.

称数 $f^{-1}(\mathscr{M}_1(f(\mu)))$ 为**相对于 f 的 μ 的平均**, 换句话说, 这个平均是使得

$$\Big(\sum_i\alpha_i\Big)f(a)=\sum_i\alpha_if(x_i)$$

的数 a, 把它记做 $\mathscr{M}_f(\mu)$.

这个数 a 的存在性由 $\mathscr{M}_1(f(\mu))\in f(A)$ 推出. 它的唯一性由 f 的双射性得到. 显然 $\mathscr{M}_f(\mu)\in A$, 更准确地说, 有

$$\inf(x_i)\leqslant\mathscr{M}_f(\mu)\leqslant\sup(x_i).$$

还注意到从定义立刻得到: 对于所有 $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha\neq0$, 有 $\mathscr{M}_f=\mathscr{M}_{\alpha f+\beta}$.

例 1° 如果 f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 内的恒等映射 $x\to x$, 则有

$$\mathscr{M}_f(\mu)=\mathscr{M}_1(\mu).$$

称这个平均为**算术平均**, 因为在所有 α_i 相等的情形下, 事实上有

$$\mathscr{M}_1(\mu)=n^{-1}\Big(\sum x_i\Big),$$

其中 n 为 I 的基数.

更一般地, 用 $\mathscr{M}_r$ 表示相对于数值函数 $x \to x^r$ 的平均, 这个数值函数当 $r > 0$ 时定义在 $\mathbb{R}_+$, 当 $r < 0$ 时定义在 $\mathbb{R}_+^*$. 例如, $\mathscr{M}_{-1}$ 是**调和平均**, 而 $\mathscr{M}_2$ 是**二次平均**.

2° 基于一个稍后显现的理由, $\mathscr{M}_0$ 表示相对于定义在 $\mathbb{R}_+^*$ 的函数 $x \to \log x$ 的平均. 当所有 α_i 等于 1 时, 关系式

$$n \log a = \sum \log x_i = \log(\Pi x_i)$$

表明 $\mathscr{M}_0(\mu) = (\Pi x_i)^{1/n}$, 这是 x_i 的几何平均, 我们称 $\mathscr{M}_0$ 为**几何平均**即来源于此.

平均的比较 对于 A 上的任何严格单调的连续函数 f, $\mathscr{M}_f$ 是 A 上的离散测度的集合上的一个数值函数. 我们要研究在什么条件下 $\mathscr{M}_f = \mathscr{M}_g$, 或更一般地有 $\mathscr{M}_f \leqslant \mathscr{M}_g$.

引理 20-2 *设 f 是 $\mathbb{R}$ 的区间 A 上的一个凸数值函数. 则对于 A 上的所有测度 μ 有*

$$f\left(\mathscr{M}_1(\mu)\right) \leqslant \mathscr{M}_1\left(f(\mu)\right).$$

等号仅当 f 在承载 μ 的最小区间上是仿射函数时成立.

证明 设 $\mu = (\alpha_i, x_i)_{i\in I}$, 而 G 是测度 $(\alpha_i, M(x_i))_{i\in I}$ 的重心, 其中 $M(x_i)$ 表示 f 的图像 Γ 的横坐标为 x_i 的点.

G 的坐标 x, y 是

$$x = \mathscr{M}_1(\mu) \quad \text{和} \quad y = \mathscr{M}_1\left(f(\mu)\right).$$

由于 f 是凸的, 集合 $A(f)$ 是凸的, 故含有重心 G; 换句话说, G 在 f 的图像上方, 这用坐标表示为 $f(x) \leqslant y$, 这恰好是要证的不等式.

如果 f 在区间 $[\inf(x_i), \sup(x_i)]$ 上是仿射的, G 显然在 f 的图像上, 故 $f(x) = y$. 如果 f 不是仿射的, 把 $\inf(x_i)$ 记做 x_1, 把 $\sup(x_i)$ 记做 x_2. 对于所有 $x \in (x_1, x_2)$, $M(x)$ 严格在 Γ 的上方. 特别地, 对于测度 $\nu' = (\alpha_i, M(x_i))_{i=1,2}$ 的重心就是这种情形; 再令 $\nu'' = (\alpha_i, M(x_i))_{i\neq 1,2}$.

重心的一个熟知性质表明 G 属于连接 ν' 和 ν'' 的重心的线段; 由于这两个重心在 Γ 的上方, 其中一个严格在 Γ 上方, 故 G 也如此; 换言之, $f(x) < y$. □

例 如果 f 是严格凸的, 则对于所有 μ, 只要它不是被单独一个点承载, 就有

$$f\left(\mathscr{M}_1(\mu)\right) < \mathscr{M}_1\left(f(\mu)\right).$$

推论 20-3 *假设 f 是 $\mathbb{R}$ 的区间 A 上的严格递增的连续数值函数; 则*

$$(\mathscr{M}_1 \leqslant \mathscr{M}_f) \Leftrightarrow (f\text{是凸的}); \quad (\mathscr{M}_f \leqslant \mathscr{M}_1) \Leftrightarrow (f\text{是凹的}).$$

当 f 递减时, 有类似的准则, 只需置换 "凸" 和 "凹".

在 f 是凸或者凹的情形下, 仅当 f 在承载 μ 的区间上是仿射的时候, 才有 $\mathscr{M}_1(\mu) = \mathscr{M}_f(\mu)$.

证明 假定 f 是递增的. 如果 f 是凸的, 引理 20-2 表明

$$f(\mathscr{M}_1(\mu)) \leqslant \mathscr{M}_1(f(\mu)), \text{于是 } \mathscr{M}_1(\mu) \leqslant f^{-1}(\mathscr{M}_1(f(\mu))) = \mathscr{M}_f(\mu).$$

反之, 如果 $\mathscr{M}_1 \leqslant \mathscr{M}_f$, 这就表示

$$\text{对于所有 } \mu, \quad f(\mathscr{M}_1(\mu)) \leqslant \mathscr{M}_1(f(\mu)).$$

对于形为 $(\alpha_i, x_i)_{i=1,2}, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 的 μ 这个特殊情形, 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

换言之, f 是凸的.

从引理 20-2 推出, 如果 f 是凸的, 则仅当 f 在承载 μ 的区间上是仿射函数时, 才有 $\mathscr{M}_1(\mu) = \mathscr{M}_f(\mu)$.

以同样的方式处理 f 是凹的情形. 如果 f 是递减的, 则 $-f$ 是递增的, 并且 $\mathscr{M}_f = \mathscr{M}_{-f}$, 这时的等价性由刚确立的等价性推导出来. □

定理 20-4 设 f 和 g 是 $\mathbb{R}$ 的区间 A 上的两个严格单调的连续函数.

1° $\mathscr{M}_f = \mathscr{M}_g$ 等价于

$$g = \alpha f + \beta, \quad \text{其中 } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{并且} \alpha \neq 0.$$

2° $\mathscr{M}_f \leqslant \mathscr{M}_g$ 等价于: 或者 g 是递增的, 并且 $g \circ f^{-1}$ 是凸的; 或者 g 是递减的, 并且 $g \circ f^{-1}$ 是凹的.

在这两种情形下, 当 $g \circ f^{-1}$ 是严格凸的或者凹的时候, 仅对于 μ 只被一个点承载这个情形才有 $\mathscr{M}_f(\mu) = \mathscr{M}_g(\mu)$.

证明 1° 关系式 $\mathscr{M}_f = \mathscr{M}_g$ 意味着对于所有测度 $(\alpha_i, x_i)_{i\in I}$, 其中 $\sum \alpha_i = 1$, 我们有

$$f^{-1}\left(\sum \alpha_i f(x_i)\right) = g^{-1}\left(\sum \alpha_i g(x_i)\right).$$

如果令

$$h = g \circ f^{-1} \quad \text{和} \quad y_i = f(x_i),$$

这个关系式转换为

$$h\left(\sum \alpha_i y_i\right) = \sum \alpha_i (h \circ f)(x_i) = \sum \alpha_i h(y_i),$$

或者进一步转换为

$$\mathscr{M}_1(f(\mu)) = \mathscr{M}_h(f(\mu)).$$

由于测度 $f(\mu)$ 可以是 $f(A)$ 上的任意测度, 这个关系式简单地改写为 $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_h$; 而推论 20-3 表明 h 既是凸的又是凹的, 从而是仿射的; 换言之有

$$(g \circ f^{-1})(y) = \alpha y + \beta \quad \text{其中} \quad \alpha \neq 0;$$

或者令 $f^{-1}(y) = x$, 则有

$$g(x) = \alpha f(x) + \beta.$$

2° 现在研究不等式 $\mathscr{M}_f \leqslant \mathscr{M}_g$, 首先假定 f 和 g 是递增的. 一个跟前面平行的计算表明: 关系式 $\mathscr{M}_f \leqslant \mathscr{M}_g$ 等价于 $\mathscr{M}_1 \leqslant \mathscr{M}_h$, 而根据推论 20-3, 这又等价于 $h = g \circ f^{-1}$ 是凸函数.

如果 f 是递增的, 而 g 是递减的, 由于 $\mathscr{M}_g = \mathscr{M}_{-g}$, 不等式 $\mathscr{M}_f \leqslant \mathscr{M}_g$ 等价于函数 $-g \circ f^{-1}$ 的凸性, 随之等价于 $g \circ f^{-1}$ 的凹性.

其余两种情形只需注意到两个函数 $u \to g(u)$ 和 $u \to g(-u)$ 同时是凸的或者是凹的, 就可推出相应结果.

当 h 是严格凸的或者凹的时候, 推论 20-3 表明仅当 $f(\mu)$ 从而 μ 由一个点承载时有 $\mathscr{M}_1(f(\mu)) = \mathscr{M}_h(f(\mu))$; 故有最后一个结论. □

推论 20-5 (实用准则) 假定 f 和 g 具有二阶导数, 并且 f' 和 g' 处处不等于 0; 则有

$$(\mathscr{M}_f \leqslant \mathscr{M}_g) \Leftrightarrow (f''/f' \leqslant g''/g').$$

证明 由于 f 换为 $-f$ 或 g 换为 $-g$, 在待建立的关系中涉及的所有的量均不变, 可以仅考虑 f 和 g 是递增的情形.

关系式 $\mathscr{M}_f \leqslant \mathscr{M}_g$ 等价于 $g \circ f^{-1}$ 的凸性; 令

$$F(y) = (g \circ f^{-1})(y) \quad \text{和} \quad y = f(x);$$

则有

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

F 的凸性意味 dF/dy 关于 y 的递增性, 或者由于 f 关于 x 是递增的, 前一个递增性意味着 g'/f' 关于 x 的递增性, 即 $(g''f' - g'f'') \geqslant 0$, 或者 $f''/f' \leqslant g''/g'$. □

例 我们令

$$f_r(x) = x^r \quad \text{和} \quad f_0(x) = \log x.$$

则对于所有 r, 有

$$\text{在 } (0, +\infty) \text{ 上}, \quad f_r''/f_r' = (r-1)x^{-1}.$$

而 $(r-1)x^{-1}$ 是 r 的递增函数; 故 $\mathscr{M}_r$ **也是** r **的递增函数**. 更准确地说, 由于 $(r-1)x^{-1}$ 是 r 的严格递增函数, 如果 $r < r'$, 则只要 μ 不只被一个点承载, 就有

$$\mathscr{M}_r(\mu) < \mathscr{M}_{r'}(\mu).$$

我们强调这里并没有把 $r=0$ 的情形排除在外, 也解释了采用的记号的合理性: 特别地, 我们重新发现了经典的不等式:

$$\text{调和平均} \leqslant \text{几何平均} \leqslant \text{算术平均} \leqslant \text{二次平均}.$$

注 准则 20-5 特别有意义, 因为在面临的函数 f 的集合里, 它表明提供同样的平均的函数 f 的每个类由商 f''/f' 刻画特征; 这些商构成 A 上的函数的一个向量空间, 它的自然顺序恰好表达平均值集合上的序.

命题 20-6 (Hölder 不等式) 给定数 $\alpha,\beta,\cdots,\lambda>0$ 的有限序列, 使得 $\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$, 还给定同样长度的大于等于 0 的数的有限族列 $(a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I},\cdots,(l_i)_{i\in I}$, 则有

$$\sum_i a_i^\alpha b_i^\beta\cdots l_i^\lambda \leqslant (\sum_i a_i)^\alpha(\sum_i b_i)^\beta\cdots(\sum_i l_i)^\lambda. \tag{1}$$

仅当或者一个族的所有元素都是零, 或者所有这些族成比例时, 等式成立.

证明 如果一个数族的所有元素都是零, 关系式写成 $0=0$. 否则有

$$\frac{\sum a_i^\alpha b_i^\beta\cdots l_i^\lambda}{(\sum a_i)^\alpha(\sum b_i)^\beta\cdots(\sum l_i)^\lambda}=\sum\left(\frac{a_i}{\sum a_i}\right)^\alpha\left(\frac{b_i}{\sum b_i}\right)^\beta\cdots\left(\frac{l_i}{\sum l_i}\right)^\lambda. \tag{2}$$

而关系式 $\mathscr{M}_0\leqslant\mathscr{M}_1$ 表明

$$A^\alpha B^\beta\cdots L^\lambda\leqslant\alpha A+\beta B+\cdots+\lambda L,$$

等式仅当 $A=B=\cdots=L$ 时成立; 关系式 (2) 的右端不超过

$$\sum\left(\alpha\frac{a_i}{\sum a_i}+\beta\frac{b_i}{\sum b_i}+\cdots+\lambda\frac{l_i}{\sum l_i}\right)=\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1,$$

等式仅当对于所有的 i, 有等式

$$\frac{a_i}{\sum a_i}=\frac{b_i}{\sum b_i}=\cdots=\frac{l_i}{\sum l_i}$$

时成立, 这就表示族 $(a_i),(b_i),\cdots,(l_i)$ 成比例. □

Hölder 不等式的其他形式 设 r 是一个大于 0 的数; 在关系式 (1) 中, 把 a_i 换成 $\omega_i a_i^{r/\alpha}$,b_i 换成 $\omega_i b_i^{r/\beta},\cdots$, 其中 $\omega_i>0$; 就得到

$$\sum\omega_i(a_ib_i\cdots l_i)^r\leqslant\left(\sum\omega_i a_i^{r/\alpha}\right)^\alpha\left(\sum\omega_i b_i^{r/\beta}\right)^\beta\cdots$$

在改变记号之后, 这个关系式改写为

$$\left(\sum\omega_i(a_ib_i\cdots l_i)^r\right)^{1/r}\leqslant\left(\sum\omega_i a_i^{p_1}\right)^{1/p_1}\left(\sum\omega_i b_i^{p_2}\right)^{1/p_2}\cdots,$$

其中

$$p_1, p_2, \cdots > 0,$$

满足关系式

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots = \frac{1}{r}.$$

它还可以更简洁地写成

$$\mathscr{M}_r(ab\cdots l) \leqslant \mathscr{M}_{p_1}(a)\mathscr{M}_{p_2}(b)\cdots.$$

一个重要的情形是 $r = 1$, 并且只有两项, 这时的 Hölder 不等式写成

$$\sum \omega_i a_i b_i \leqslant \left(\sum \omega_i a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum \omega_i b_i^q\right)^{1/q} \quad \text{其中} \quad 1/p + 1/q = 1.$$

更特殊的情形是 $p = q = 2$, 我们得到 Cauchy-Schwarz**不等式**:

$$\left(\sum \omega_i a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum \omega_i a_i^2\right) \left(\sum \omega_i b_i^2\right).$$

Minkowski 不等式 20-7 这个不等式简单地表达 $\mathbb{R}^n$ 上的一个正齐次函数是凸的.

给定数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \geqslant 0$ 和数 $p \geqslant 1$; 考虑定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f

$$x = (x_i) \to \left(\sum \alpha_i |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

函数 f 显然是正齐次的, 并且在命题 19-6 的例子中已经知道它是凸的. 故有 Minkowski 不等式

$$\left(\sum \alpha_i |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum \alpha_i |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum \alpha_i |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

当诸 $\alpha_i > 0$, 并且 $p > 1$ 时, f 是严格凸的 (除去从 O 出发的射线), 因此当族 (x_i) 和 (y_i) 不成比例时不等式是严格的.

这些不等式直接可以推广到复数 x_i, y_i.

VI. 习　题

说明： 较难的习题都打了星号.

定义在任意集合上的数值函数

*1° 设 $(x_i)_{i\in I}$ 和 $(y_j)_{j\in J}$ 是大于等于 0 的实数的有限族, 使得

$$\sum_i x_i = \sum_j y_j.$$

证明存在大于等于 0 的实数的有限族 $(z_{ij})_{i,j\in I\times J}$, 使得

$$\text{对于所有 } i \in I, \quad x_i = \sum_j z_{ij};$$

$$\text{对于所有 } j \in J, \quad y_j = \sum_i z_{ij}.$$

*2° 推广上题的结果到有序向量空间 $\mathscr{F}(E,\mathbb{R})$ 的大于等于 0 的元素的族, 其中 E 是任意集合.

定义在拓扑空间上的数值函数

3° 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的数值函数, 使得对于所有 x, 映射 $y \to f(x,y)$ 是递增的, 对于所有 y, 映射 $x \to f(x,y)$ 是递增的. 证明当 x 和 y 在明确的意义下趋于 $+\infty$ 时 f 趋于一个极限.

4° 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的数值函数. 称使得

$$\limsup_{x\to a, x>a} f(x) \neq \limsup_{x\to a, x<a} f(x)$$

的点 a 的集合为 A, 证明 A 至多是可数的.

*5° 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的数值函数. 证明使得 $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} f(x)$ 存在但是异于 $f(a)$ 的 $\mathbb{R}$ 的点 a 的集合至多是可数的.

*6° 设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的数值函数. 说 f 在 $a \in \mathbb{R}$ 取**相对最大值**, 如果存在 a 的一个邻域 V, 使得对于所有 $x \in V$ 有 $f(x) \leqslant f(a)$. 把这些点 a 的集合记做 A. 证明 $f(A)$ 至多是可数的.

7° 设 $(f_i)_{i\in I}$ 是定义在一个距离空间 E 上的有限数值函数的同等连续的一个族.

a) 证明如果函数 $\sup\limits_{i\in I} f_i$ 和 $\inf\limits_{i\in I} f_i$ 是有限的, 则它们是一致连续的.

b) 证明形如 $\sup\limits_{i\in J} f_i$ 或者 $\inf\limits_{i\in J} f_i$ 的有限函数的族 (f_J) 是同等连续的, 其中 J 是 I 的任意子集.

半连续数值函数

8° 设 f, g 是从拓扑空间 E 到 $\mathbb{R}$ 内的下半连续的两个映射. 证明如果 $f+g$ 是连续的, 则 f 和 g 也是连续的.

*9° 设 f 是区间 $[0,1]$ 上的下半连续的有限数值函数.

a) 证明 f 是连续函数 $g \leqslant f$ 的上包络.

b) 证明 f 是连续函数的递增序列的极限.

*10° 推广前一个题的断言到在有可数基的距离空间上的任何下半连续的有限函数 f.

11° 设 f 是定义在拓扑空间 E 上的下半连续的数值函数. 证明对于 E 的所有非空子集 A, 有

$$\sup_{x \in \overline{A}} f(x) = \sup_{x \in A} f(x).$$

12° 对于所有表示成既约形式的有理数 $r = p/q\,(q > 0)$, 令 $f(r) = q$; 证明 f 在 $\mathbb{Q}$ 里是下半连续的, 并且在所有点 $r \in \mathbb{Q}$ 上, f 的振幅是 $+\infty$.

*13° 设 E 是一个距离空间, 而 K 是 $\mathbb{R} \times E$ 的一个紧致子集. 对于所有 $x \in \mathbb{R}$, 令 $q(x)$ 是横坐标是 x 的 K 的点的集合的直径. 证明 $q(x)$ 是一个上半连续的函数.

14° 设 f 是定义在拓扑空间 E 上的数值函数. 证明 E 的使得 f 的振幅大于等于 $\lambda(\lambda > 0)$ 的点的集合是闭集.

由此推出 f 的连续点的集合是可数个开集的交集.

*15° 设 f 是定义在正方形 $C = [0,1]^2$ 上的连续数值函数. 说 f 是分片仿射的, 如果存在 C 的有限的由三角形组成的覆盖, 使得 f 在此覆盖的每个三角形上是仿射的. 设 $\mathscr{P}$ 是这些函数的向量空间, 赋以一致收敛拓扑. 设 $\alpha(f)$ 是 f 的图像在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 的初等面积. 证明 $\alpha(f)$ 是 $\mathscr{P}$ 上的下半连续函数.

Stone-Weierstrass 定理

16° 我们需要利用一个递推推理, 证明在区间 $[0,1]$ 上存在递增实多项式序列 (p_n), 在此区间上一致收敛到 $\sqrt{t}$. 令

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - p_n^2(t)\right) \quad 和 \quad p_1 = 0,$$

证明这样由递推定义的序列 (p_n) 具有所需要的性质.

17° 设 E 是一个紧致空间, 而 (f_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\mathscr{C}(E, \mathbb{R})$ 的 n 个分离 E 的点的元素的族. 证明 E 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集.

18° 设 a_1, a_2, a_3 是 $\mathbb{R}^2$ 的非共线的三个点. 用 f_i 表示函数 $x \to \|x - a_i\|$. 证明 $\mathbb{R}^2$ 上的所有连续数值函数是关于 f_1, f_2, f_3 的或者关于这些函数的平方的多项式 (其中不含常数项) 序列的极限, 该序列在 $\mathbb{R}^2$ 的所有紧致子集上一致收敛.

定义在区间上的函数

19° 设 f 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间 $I=[a,b]$ 上的连续的有限数值函数. 说 f 在一个点 $x_0\in\mathring{I}$ 是**在右侧递增的**, 如果存在一个数 $x_1>x_0$, 使得对于所有 $x\in[x_0,x_1]$ 有 $f(x_0)\leqslant f(x)$. 同样可定义在右侧递减的.

证明如果 $f(a)=f(b)=0$, 则存在 $\mathring{I}$ 的一个点 c_1, 使得 f 在点 c_1 是在右侧递增的. 也存在 $\mathring{I}$ 的一个点 c_2, 使得 f 在点 c_2 是在右侧递减的 (对于左侧亦然).

20° 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续和可导的数值函数. 利用经典的 Rolle 定理证明, 即使 f' 不是连续的, f' 也取在 f'_a 和 f'_b 之间的所有值 (证明对于所有满足 $f'_a<\lambda<f'_b$ 的 λ, 存在 $x\in[a,b]$, 使得弦 $M(a)M(x)$ 或者 $M(x)M(b)$ 有斜率 λ). 由此推出 $f'([a,b])$ 是连通的.

21° 设 f 是**开**区间 (a,b) 上的连续和可导的数值函数. 如果 $\alpha=\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ 存在并且是有限的, 证明 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在, 并且 f 具有一个在 $[a,b)$ 的连续延拓, 此延拓在 a 是可导的, 导数就是 α.

22° 设 f 是区间 $I=[a,b]$ 上的连续的数值函数, 而 A 是 I 的这样的内点 x 的集合: 存在 $y>x$ 使得 $f(y)>f(x)$. 证明 A 是开集, 并且对于构成 A 的互不相交的区间中的每一个 (α,β), 有 $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$, 如果 $\alpha\neq a$, 则等式成立.

23° 设 g 是区间 $I=[a,b]$ 上的递增的且连续的数值函数, 而 k 是一个大于 0 的数.

设 A 是 I 的这样的内点 x 的集合: 对于 x, 存在一个 $y>x$, 使得 $g(y)-g(x)>k(y-x)$. 利用前一个题证明 A 是开区间的可数并集, 这些区间长度之和小于等于 $(g(b)-g(a))/k$.

24° 设 f 是从区间 $[a,b]$ 到完备距离空间 E 的一个正规映射. 证明 $f([a,b])$ 在 E 里是相对紧致的.

*25° (这个题目要求了解第三章.) 设 f 是从 $\mathbb{R}$ 的区间 I 到 ($\mathbb{R}$ 上的) 拓扑向量空间 E 的一个连续映射; 而 X 是 E 的一个凸子集, X 由半开空间 $\{x:l_i(x)>\alpha_i\}$ 的一个族的交定义, 其中 l_i 是 E 上的连续线性型, 而 α_i 是数.

假定存在 I 的一个可数子集 D, 使得在 $I\diagdown D$ 的所有的点 x, f 具有右导数 $f'_d(x)\in X$.

a) 利用 15-4, 证明对于所有 $a,b\in I$, 有 $f(b)-f(a)\in(b-a)X$.

b) 利用第三章 16 题, 重新证明推论 15-6.

凸函数

26° 设 $(f_i)_{i\in I}$ 是 $\mathbb{R}$ 的开区间 I 上的凸函数的一个族. 如果族 (f_i) 一致有上界, 并且存在一个点 $c\in I$, 使得族 $(f_i(c))$ 是有下界的, 证明族 (f_i) 在 I 的所有紧致区

间上同等连续.

27° 设 f_n 是 $\mathbb{R}$ 的开区间 I 上的凸函数的一个序列, 它简单收敛到有限函数 f. 利用前一题证明在 I 的所有紧致区间上是一致收敛的.

*28° 推广前两个题到 $\mathbb{R}^2$(或更一般地, $\mathbb{R}^n$) 的凸子集 X 上的凸函数.

29° 设 f,g 是向量空间的一个凸集 X 的两个凸函数; 证明如果 $(f+g)$ 在 X 上是仿射的, 则 f 和 g 也如此.

30° 设 f 是紧致区间 $[a,b]$ 上的凸函数, 并且 $f'_d(a)$ 和 $f'_g(b)$ 是有限的. 证明 f 是 $\mathbb{R}$ 上的一个凸函数在 $[a,b]$ 上的限制.

31° 设 g 是数对 (x,t) 的连续数值函数, 其中 $a \leqslant x \leqslant b$, 而 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. 如果对于所有 t, g 是 x 的凸函数, 证明函数

$$f(x) = \int_\alpha^\beta g(x,t)dt$$

的凸性.

32° 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的一个凸函数, 而 φ 是 $\mathbb{R}$ 上的大于等于 0 的连续函数, 并且在一个紧致区间之外为零.

a) 证明函数 $F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi(t)dt$ 在 $\mathbb{R}$ 上是凸函数.

b) 设 ψ 是如下定义的函数

$$\text{当 } |t| \geqslant 1 \text{ 时}, \psi(t) = 0; \quad \text{当 } |t| < 1 \text{ 时}, \psi(t) = ke^{(t^2-1)^{-1}},$$

其中 k 是使得 ψ 在 $\mathbb{R}$ 上的积分等于 1 的实数.

证明 ψ 在 $\mathbb{R}$ 上具有所有阶的导数.

c) 证明凸函数

$$f_a(x) = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\psi(at)dt = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi(a(x-t))dt$$

是无穷次可导的, 并且当 $a \to +\infty$ 时 f_a 在 $\mathbb{R}$ 的所有紧致区间上一致收敛到 f.

33° 如果 f 是 $(0,+\infty)$ 上的一个递增凸函数. 试证明: 或者 $f =$ 一个常数, 或者 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

34° 如果 f 是区间 $[a,+\infty)$ 上的一个凸函数. 证明当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)/x$ 趋于一个有限值或者趋于 $+\infty$. 再证明如果这个极限小于等于 0, 则函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上是递减的.

*35° 设 f 是区间 $[0,+\infty)$ 上的凸函数.

a) 证明如下定义的函数 φ

$$\varphi(x) = f(x) - xf'_d(x)$$

(f 的图像在原点的右切线的纵坐标) 是递减的.

b) 证明如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ 是有限数 β, 则 $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/x)$ 也是有限数, 再证明 $f(x)-(\alpha x+\beta)\geqslant 0$, 且当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)-(\alpha x+\beta)\to 0$.

36° 推广命题 18-4 到这样的半连续函数 f: 对于所有 $a,b\in I, a<b$, 存在 $x\in(a,b)$, 使得 $M(x)$ 在线段 $M(a)M(b)$ 的下方.

37° 设 f 是 $\mathbb{R}$ 的一个开区间 I 上的严格递增 (对应地, 递减) 函数. 证明为使 f 是凸的, 必须且只需它的反函数 f^{-1} 是凹的 (对应地, 凸的).

38° 设 f 是 $\mathbb{R}$ 的一个区间 I 上的连续的有限的数值函数. 证明如果对于所有 $a\in I$, 存在含有 $M(a)$ 的一个开区间, 位于 f 的图像下方, 则 f 是凸的.

39° 利用从半平面 $x>0$ 到自身的投影变换 $(x,y)\to(x^{-1},yx^{-1})$ 的性质, 证明如果 f 当 $x>0$ 时是凸的, 则函数 $x\to xf(x^{-1})$ 也如此, 其逆亦真.

利用第 32 题再给出另一个证明.

40° a) 利用第 32 题证明: 如果 f 和 g 在同一个区间 I 上是正的、凸的和递增的 (或者递减的), 则 fg 是凸的.

b) 用同样的方式, 陈述一个 $f\circ g$ 是凸的判别法.

41° 设 f 在区间 $I\subset\mathbb{R}$ 是正的. 如果 $\log f$ 在 I 是凸的, 则说 f 是**对数凸的**.

证明如果 f 是对数凸的, 则 f 是凸的.

证明如果 f 和 g 是对数凸的, 则 fg 也是对数凸的.

为此, 我们将利用第 32 题, 在以下几个题目里同样要用到该题.

*42° 证明两个对数凸的函数之和也是对数凸的. 注意到以下事实会是方便的: 对于连续函数 f, 我们得到一个写成下列形式的对数凸的判别法, 对于所有 a,b:

$$f^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant f(a)f(b).$$

43° 设 $f(x,t)$ 是大于 0 的有限数值函数, 它在 $\mathbb{R}$ 的两个开区间 I 和 J 的乘积 $I\times J$ 上定义并且连续, 使得对于所有 $t\in J, f(x,t)$ 是关于 x 的对数凸的函数.

证明如果对于所有 $x\in I$, 积分

$$g(x)=\int_J f(x,t)dt$$

是收敛的, 则 g 是对数凸的. 可利用第 42 题.

44° 令

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

利用第 43 题证明对于所有 $x>0$ 这个积分是有限的, 并且函数 Γ 在 $(0,+\infty)$ 上是对数凸的.

证明对于任何整数 n 有 $\Gamma(n+1)=n!$.

45° 用 $\mathscr{K}$ 表示开区间 (a,b) 上的凹的并且正的函数的集合.

a) 证明 $\mathscr{K}$ 对于关系

$$\text{如果 } (g-f)\in\mathscr{K}, \text{ 则 } f \prec g,$$

是有序的.

b) 我们说 $\mathscr{K}$ 的一个元素 f 是**极值**, 如果所有关系 $g \prec f$, 其中 $g\in\mathscr{K}$, 蕴涵 $g=\lambda f$, 其中 $\lambda\in[0,1]$.

证明 $\mathscr{K}$ 的仅有的极值元素是这样的函数 f 在 (a,b) 上的限制, f 在 a 和 b 是零, 在两个区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上是仿射的 (其中 $c\in(a,b)$), 或者 f 在 (a,b) 上是仿射的, 而在 a 或者 b 为零.

c) 利用第 32 题证明 $\mathscr{K}$ 赋以序 "$\prec$" 后是格.

*46° 证明对于所有异于 $\mathbb{R}^2$ 的所有单**连通**开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, 存在定义在 Ω 上的连续数值函数 f, 在 Ω 是局部**凸的**, 但是不能延拓到任何严格包含 Ω 的开集 Ω' 上同样类型的函数.

平均值和不等式

47° 证明周长为 $2p$ 的三角形的面积当它的边 a,b,c 相等时取最大值 (利用关系 $\mathscr{M}_0<\mathscr{M}_1$ 以及由 $p,(p-a),(p-b),(p-c)$ 表示面积的公式).

48° 证明表面积给定的长方体的体积当它是一个正方体时是最大的.

49° 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是大于 0 的数; 而 a 是它们的几何平均.

证明

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant(1+a)^n,$$

等式仅当所有 a_i 相等时成立.

50° 设 μ 是 $(0,\infty)$ 上的一个离散测度. 证明函数 $r\to(\mathscr{M}_r(\mu))^r$ 是对数凸的.

51° 设 φ 是 $\mathbb{R}$ 的开区间 I 上的一个连续数值函数, $a\in I$.

a) 证明存在 $(0,+\infty)$ 上的一个 (唯一的) 严格递增函数 Φ, 使得

$$\Phi''=\varphi\Phi';\quad \Phi(a)=0;\quad \Phi'(a)=1.$$

b) 如果 μ 是 I 上的任意一个离散测度, 令

$$J(\varphi)=\Phi\left(\mathscr{M}_\Phi(\mu)\right).$$

证明 J 是向量空间 $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ 上的对数凸的函数.

52° 对于所有 $f\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 和所有 $p>0$, 令

$$N_p(f)=\left(\int_0^1|f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

a) 证明如果 $p>1$, 则 N_p 是 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 上的凸函数.

现在设 f 是给定的且大于 0.

b) 证明函数 $p\to N_p(f)$ 是递增的和无穷次可导的.

c) 证明 $(N_p(f))^p$ 是 p 的对数凸的函数.

d) 证明 $N_p(f)$ 是 p^{-1} 的对数凸的函数 (利用 39 题).

53° 沿用 52 题的记号, 证明如果 $p^{-1}+q^{-1}=1$, 则有不等式

$$N_1(fg)\leqslant N_p(f)N_q(g).$$

54° 用 $\varphi,\psi,\cdots$ 表示 $[0,+\infty)$ 上的严格递增的连续函数, 对于所有满足 $f\geqslant 0$ 的 $f\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, 用关系式

$$\varphi(\mathscr{M}_\varphi(f))=\int_0^1\varphi(f(x))dx$$

定义 $\mathscr{M}_\varphi(f)$. 证明 $(\mathscr{M}_\varphi\leqslant\mathscr{M}_\psi)$ 等价于 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是凸的.

55° 设 φ 是区间 $[0,a]$ 上的严格递增的连续函数, 还满足条件 $\varphi(0)=0$; 而 ψ 是 φ 的反函数.

证明对于所有 x,y, 只要满足 $x\in[0,a],y\in[0,\varphi(a)]$, 就有

$$xy\leqslant\int_0^x\varphi(t)dt+\int_0^y\psi(t)dt,$$

等式仅当 $y=\varphi(x)$ 时成立.

56° 采用同样的记号, 用 Φ 和 Ψ 分别表示 φ 和 ψ 的在 0 取零值的原函数.

设 f,g 是 $[0,1]$ 上的分别在 $[0,a]$ 和 $[0,\varphi(a)]$ 取值的两个连续函数. 证明有

$$\int_0^1 f(u)g(u)du\leqslant\int_0^1\Phi(f(u))du+\int_0^1\Psi(g(u))du.$$

VII. 第二章的法汉术语对照和索引[①]

①表中的数字表示节和段, 或者某一习题的序号.

VIII. 参考文献

BOURBAKI, N., *Fonctions d'une variable réelle*, ch. I, II, III, fasc. n° 1074, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris.

HARDY, Littlewood, Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952. (有中译本, 不等式, 科学出版社)

IX. 定义和公理

上包络. 所谓集合 E 上的数值函数族 $(f_i)_{i\in I}$ 的**上包络**是指函数;

$$f = \sup_{i\in I} f_i,$$

它定义为: $f(x) = \sup\limits_{i\in I} f_i(x)$ 对于任何 $x \in E$ 成立.

上极限. 设 f 为集合 E 上的数值函数, $\mathscr{B}$ 为 E 上的滤子基.

所谓 f 沿 $\mathscr{B}$ 的**上极限**是指 $\overline{f}(\mathscr{B})$ 的上确界 (其中 $\overline{f}(\mathscr{B}) = \bigcap\limits_{B\in\mathscr{B}} \overline{f(B)}$); 记它为 $\limsup\limits_{\mathscr{B}} f$.

下半连续性. 定义在拓扑空间 E 上的数值函数 f 称为在点 a **下半连续**, 是指对于任何 $\lambda < f(a)$, 存在 a 的邻域 V, 使得 $\lambda < f(V)$.

单变量凸函数. 设 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 的区间 I 上的有限数值函数. 我们说 f 是**凸的**, 是指对于任何 $x_1, x_2 \in I$, 满足 $x \in [x_1, x_2]$ 的任何 f 的图像上的点 $M(x)$ 在线段 $M(x_1)M(x_2)$ 之下.

向量空间子集上的凸函数. 设 f 为定义在 ($\mathbb{R}$ 上的) 向量空间 E 的子集上的有限数值函数.

我们说 f 是**凸的**, 是指位于 f 的图像之上的向量空间 $E \times \mathbb{R}$ 的点集是凸的.

正齐次函数. 设 f 为定义在 ($\mathbb{R}$ 上的) 向量空间 E 的子集 X 上的数值函数. 我们说 f 是**正齐次的**, 是指 X 是顶点为 0 的锥, 且

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ 对于任何 } x \in X \text{ 和任何 } \lambda > 0 \text{ 成立.}$$

单调函数的相对平均值. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 的区间 A 上的严格单调连续数值函数; $\mu = (\alpha_i, x_i)_{i\in I}$ 为 A 上的正离散测度.

所谓 μ **相对于** f **的平均值**, 是指满足

$$\left(\sum_i \alpha_i\right) f(a) = \sum_i \alpha_i f(x_i)$$

的数 a.

记这个数 a 为 $\mathscr{M}_f(\mu)$.

第三章　拓扑向量空间

在第一章第 22 节, 我们曾经强调指出在函数空间赋以拓扑的好处, 并且给出了许多这类拓扑的例子.

现在我们要系统研究这类空间中的最有用者, 这就是赋以了 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的向量结构的空间. Banach 在这个领域做出了最重要的贡献.

I. 一般拓扑向量空间. 例子

§1. 拓扑向量空间的定义和初等性质

在第一章第 14 节, 我们曾经通过拓扑和代数之间的相容性定义了拓扑群、拓扑环和拓扑域的概念. 在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的向量空间不仅赋以了加法, 还赋以了跟 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的元素的乘法; 如果想在一个这样的空间上定义一个有用的拓扑, 就还必须涉及基础数域的拓扑.

为了简化叙述, 只要牵涉不到 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的特殊性质, 我们就用 $\mathbb{K}$ 表示基础数域.

定义 1-1　设 E 是既赋以数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间结构, 又赋以一个拓扑结构的集合; 我们说这两个结构是**相容的**, 如果

1° E 的拓扑同 E 的加法群是相容的.

2° 从拓扑空间 $\mathbb{K}\times E$ 到 E 内的映射 $(\lambda, x)\to\lambda x$ 是连续的.

赋以了这两个相容的结构的 E 按照 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 称为**实或复拓扑向量空间** (缩

写为 e.v.t).

从现在起我们就提请注意, 如果 E 是 $\mathbb{C}$ 上的一个 e.v.t, 那么 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域的事实就蕴涵 E 同 $\mathbb{R}$ 上的 e.v.t 的结构也是相容的. 这个注释让我们在需要时不管哪个 $\mathbb{K}$, 都可以利用 E 作为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间的性质, 比如它的凸集的性质.

例 1° 我们不加证明地指出, 乘积 $\mathbb{K}^n$ 和赋以一致收敛拓扑的空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ 是拓扑向量空间, 这将是后面的一个结果的推论.

2° 反之, $\mathbb{R}$ 上的连续数值函数的向量空间 $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 赋以一致收敛拓扑 (关联于拟距离 $d(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|$) 不是拓扑向量空间. 事实上, 虽然它的拓扑与群结构是相容的, 但是 λf 不是二元组 (λ,f) 的连续函数, 因为, 比如说, 如果 f 是一个无界函数, 当 $\lambda\to 0$ 时 λf 不收敛到函数 O.

命题 1-2 一个拓扑跟集合 E 上的一个向量空间结构的相容性可以表达为下列条件:

1° 从 $E\times E$ 到 E 的映射 $(x,y)\to(x+y)$ 是连续的.

2° 对于所有 $a\in E$, 从 $\mathbb{K}$ 到 E 内的映射 $\lambda\to\lambda a$ 在点 $\lambda=0$ 是连续的.

3° 对于所有 $\alpha\in\mathbb{K}$, 从 E 到 E 内的映射 $x\to\alpha x$ 在点 $x=\mathrm{O}$ 是连续的.

4° 从 $\mathbb{K}\times E$ 到 E 内的映射 $(\lambda,x)\to\lambda x$ 在点 $(0,\mathrm{O})$ 是连续的.

证明 根据定义 1-1, 如果两个结构是相容的, 条件 1°, 2°, 3°, 4° 显然满足.

反之, 设四个条件满足, 关系

$$\lambda x=\alpha a+(\lambda-\alpha)a+\alpha(x-a)+(\lambda-\alpha)(x-a)$$

表明当 $\lambda\to\alpha$ 和 $x\to a$ 时 (这蕴涵 $(\lambda-\alpha)\to 0$ 和 $(x-a)\to\mathrm{O}$), 则有

$$\lambda x\to\alpha a+0a+\alpha\mathrm{O}+0\mathrm{O}=\alpha\mathrm{a}.$$

故 $(\lambda,x)\to\lambda x$ 是连续的.

特殊情形下映射 $x\to(-1)x=-x$ 是连续的; 由于根据假设加法是连续的, E 的拓扑跟 E 的加法群结构必然是相容的. □

命题 1-3 如果 E 是一个拓扑向量空间. 则对于所有 $\alpha\neq 0$ 和所有 $b\in E$, 伸缩映射 $x\to\alpha x+b$ 是从 E 到自己同胚.

证明 所有伸缩映射是双射, 伸缩映射的逆映射自己也是伸缩映射; 由定义 1-1 得到所有伸缩映射是连续的; 于是这是从 E 到 E 内的双连续的双射. □

推论 1-4 1° E 的所有伸缩映射把所有开集 (对应地, 闭集) 变换为 E 的开集 (对应地, 闭集).

2° E 的点 a 的邻域的集合 $\mathscr{V}_a$ 是点 O 的邻域的集合 $\mathscr{V}$ 在平移 $x\to x+a$ 下的像.

这是以下事实的直接推论: 所有伸缩映射, 从而作为其特例的平移, 是 E 的同胚.

我们提醒第二个性质在所有拓扑群里都正确; 它表明一旦知道了点 O 的邻域的集合, 就知道了 E 的拓扑.

命题 1-5 设 P 是拓扑向量空间 E 的一个子集.

如果 P 是 E 的向量子空间 (对应地, 凸集, 锥), 则它在 E 中的附着集 $\overline{P}$ 也如此.

证明 首先回想起: 如果 f 是从拓扑空间 A 到另一个拓扑空间 B 的连续映射, 则对于所有 $X \subset A$, 有 $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ (参见第一章,7-5).

设 P 是 E 的向量子空间; 假定 $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, 并且 f 是从 $E \times E$ 到 E 的映射 $(x, y) \to \lambda x + \mu y$; 它把 $P \times P$ 映射到 P, 由于它是连续的, 故它把 $\overline{P} \times \overline{P} = \overline{P \times P}$ 映射到 $\overline{P}$; 换句话说, 对于所有 $x, y \in \overline{P}$, 有 $\lambda x + \mu y \in \overline{P}$, 即 $\overline{P}$ 是 E 的子空间.

关于 E 的凸集的类似断言, 通过考虑当 $\lambda, \mu \geqslant 0, \lambda + \mu = 1$ 时的这个映射 f 而得到.

而关于顶点为 O 的锥的断言, 利用从 E 到 E 的形式如 $x \to \lambda x$ 的映射 f 而得到, 其中 $\lambda > 0$. □

推论 1-6 在一个拓扑向量空间里, 所有超平面[①] H 或是闭的, 或是处处稠密的.

事实上, 根据命题 1-5, 再考虑到 E 的所有包含 H 的向量子空间是 E, 或是 H, 故有或者 $\overline{H} = H$, 或者 $\overline{H} = E$.

命题 1-7 (连续线性映射) 设 E, F 是两个同一数域 $\mathbb{K}$ 上的拓扑向量空间.

1° 为了从 E 到 F 的一个线性映射是连续的, 必须且只需它在 E 的点 O 是连续的.

2° 从 E 到 F 的连续线性映射的集合 $\mathscr{L}(E, F)$ 是从 E 到 F 内的映射的向量空间 $\mathscr{F}(E, F)$ 的一个向量子空间.

证明 第一个断言是拓扑群里的表达连续的一个特征的特殊情形 (参见第一章, 第 14 节).

为了证明第二个断言, 设 $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, 而 $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$; 从 E 到 F 的线性映射 $x \to \lambda f(x) + \mu g(x)$ 是连续的, 这是因为 f 和 g 是连续的, 而且从 $F \times F$ 到 F 内的映射 $(u, v) \to \lambda u + \mu v$ 是连续的; 换言之, 必然有 $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E, F)$. □

通常把从 E 到 E 内的连续线性映射的空间 $\mathscr{L}(E, E)$ 记做 $\mathscr{L}(E)$, 并且称其元素为 E 连续**算子**.

[①] 我们提醒: 向量空间 E 的一个超平面是 E 上的一个线性型的零点的集合.

最重要的连续线性映射是在 $\mathbb{K}$ 内取值的那种. 我们有

定义 1-8 在 $\mathbb{K}$ 内取值的连续线性映射称为**连续线性型**. 把空间 $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ 记做 E', 并且称为 E 的**拓扑对偶**.

显然有 $E' \subset E^*$, 这里 E^* 表示 E 的代数对偶, 即 E 上的线性型的集合.

一般情形下有 $E' \neq E^*$, 即一般存在不连续的线性型 (参见习题的 69 题).

对于所有线性型 f, 超平面 $f^{-1}(0)$ 是 $\mathbb{K}$ 的元素 $\{0\}$ 在 f 下的逆像; 于是如果 f 是连续的, 这个超平面在 E 内是闭的; 可以证明, 反之, 如果 $f^{-1}(0)$ 是闭的, 则 f 是连续的 (参见习题的 8 题). 这里是另一个方便的连续性的刻画:

命题 1-9 E 上的线性型 f 是连续的, 等价于存在 E 的一个非空开集, 在该开集上 f 是有界的.

证明 如果 f 是连续的, f 在 O 的连续性蕴涵存在 O 的一个邻域, 随之存在一个非空开集, 使得对于该开集的所有的点 x 有 $|f(x)| \leqslant 1$.

反之, 设 X 是一个非空开集, 在 X 上有 $|f(x)| \leqslant k$, 又设 a 是 X 的一个点; X 的平移 $X-a$ 含有 O, 从而是 O 的一个邻域, 对于所有 $x \in (X-a)$, 有

$$f(x) \in f(X-a) = f(X) - f(a),$$

由此得 $|f(x)| \leqslant k + |f(a)|$.

对于所有 $\varepsilon > 0$, 存在 O 的邻域 V, 使得在该邻域上 $|f(x)| \leqslant \varepsilon$, 此邻域就是 $(X-a)$ 的在比例系数为 $\varepsilon(k+|f(a)|)^{-1}$ 的相似变换下的像. 换言之, f 在点 O 连续, 从而根据命题 1-7 处处连续. □

完全子集 1-10 如果 X 是向量空间 E 的一个子集, 包含 X 的最小子空间是 X 的元素的线性组合的集合 F; 称 F 为 X 生成的子空间.

如果 E 是一个 e.v.t, 命题 1-5 表明 F 的附着集 $\overline{F}$ 也是 E 的向量子空间; 把 $\overline{F}$ 称为**由 X 生成的 E 的闭子空间**.

当 $\overline{F} = E$ 时, 即 F 在 E 内处处稠密时, 则说 X 在 E 内是**完全**的. 换句话说, X 在 E 内是完全的, 如果对于所有 $x \in E$, 在 x 的所有邻域内存在 E 的点, 这些点是 X 的元素的线性组合.

比如, E 的所有基是 E 的完全子集; 但是有必要指出有可能一个集合是完全的, 却不因此生成 E. 例如, 在 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 内, 单项式 t^n 的集合 X 生成多项式向量空间 F, 它不同于 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, 但是根据 Stone-Weierstrass 定理在后一空间内是处处稠密的. 我们还将遇到其他完全集合的例子, 特别是在 Hilbert 空间的研究中.

§2. 关联于半范数族的拓扑

在第一章第 22 节研究过的函数空间的拓扑曾经或由距离或更一般地由拟距离

定义. 当涉及赋以向量结构的空间时, 就得要求这些距离或拟距离跟这些空间的向量结构在明确的意义下是相容的. 这就引导我们得到半范数的重要概念, 并且进而着手研究由范数, 半范数或半范数族定义的拓扑.

定义 2-1 设 E 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间. 称从 E 到 $\mathbb{R}$ 的所有满足下列条件的映射 p 为**半范数**

S_1: 对于所有 $x \in E$, 有 $p(x) \geqslant 0$;

S_2 对于所有 $x \in E$ 和所有 $\lambda \in \mathbb{K}$, 有 $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;

S_3 对于所有 $x, y \in E$, 有 $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

此外, 如果对于所有 $x \neq \mathrm{O}$, 有 $p(x) \neq 0$, 我们说 p 是一个**范数**.

当研究一个明确定义了的半范数时, 通常把 $p(x)$ 记做 $\|x\|$.

例 2-2 如果 f 表示 E 上的一个线性型, 则 $|f|$ 是 E 上的一个半范数; 事实上, 我们有

$$|f| \geqslant 0; \quad |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)|,$$

以及

$$|f(x+y)| = |f(x) + f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)|.$$

为使这个半范数是一个范数, 必须 $f(x)$ 仅当 $x = \mathrm{O}$ 时为 0, 从而必须仅当 E 的维数是 1 时; 反之, 如果 E 的维数是 1, 并且 $f \neq \mathrm{O}$, 则 $|f|$ 必然是一个范数.

由定义直接得到的性质和运算 2-3 1° 对于 E 上的所有半范数, $p(\mathrm{O}) = 0$.

2° 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间 E 上的所有半范数, 也是看作 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 E 上的一个半范数. 一个特殊的推论是, p 既然是次可加的和正齐次的, 故在 E 上是凸的 (参见第二章, 命题 19-6).

这里给出几个运算, 通过这些运算, 可以从其他半范数出发产生出新的半范数; 它们十分类似于我们研究拟范数时所研究过的那些运算.

3° 半范数的**正的线性组合** (即系数大于等于 0 的线性组合) 仍然是半范数. 特别地, 范数的有限和还是范数.

比如, 在 $\mathbb{C}^n$ 里, 函数 $x \to$ 坐标x_i 是一个线性型, 故 $|x_i|$ 是一个半范数; 从而 $\sum\limits_i |x_i|$ 是半范数, 而后者仅当 $x = \mathrm{O}$ 时为零, 故是范数.

4° 所有半范数的 (处处有限的) 极限是一个半范数.

5° 对于所有半范数的族 (p_i), 如果其上包络 p 是处处有限的, 则 p 是半范数.

事实上, p 显然满足 S_1 和 S_2 ; 此外, 对于所有 i,

$$p_i(x+y) \leqslant p_i(x) + p_i(y) \leqslant p(x) + p(y),$$

由此得

$$p(x+y) = \sup p_i(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

比如, 设 $\mathscr{B}(A,\mathbb{K})$ 是从集合 A 到 $\mathbb{K}$ 内的有界映射的向量空间. 对于所有 $a\in A$, 从 $\mathscr{B}(A,\mathbb{K})$ 到 $\mathbb{K}$ 内的映射 $f\to f(a)$ 是线性的; 于是根据例 2-2, 映射 $p_a: f\to |f(a)|$ 是一个半范数.

设 X 是 A 的任意一个非空子集; 由于所有 $f\in\mathscr{B}(A,\mathbb{K})$ 是有界的, 函数 $\sup\limits_{a\in X} p_a$ 是有限的; 故这是一个半范数; 称它为 X 上的一致收敛半范数.

6° 设 E 和 F 是同一个数域 $\mathbb{K}$ 上的两个向量空间, φ 是从 E 到 F 内的线性映射, 而 p 是 F 上的半范数; 则 $p\circ\varphi$ 是 E 上的一个半范数; 它的验证是直截了当的.

例 2-2 是这个过程的特例; 还有另一个例子: 设 F_1, F_2 是 $\mathbb{K}$ 上的两个向量空间, 而 p_1 是 F_1 上的半范数; 那么定义在 $F_1\times F_2$ 上的函数 $(x_1,x_2)\to p_1(x_1)$ 是 $F_1\times F_2$ 上的一个半范数.

7° 最后是与在第一章, 15-2 中 6° 研究过的对于拟距离的运算类似的运算:

设 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是向量空间 E 上的半范数的一个有限序列, 而 φ 是一个从 $\mathbb{R}_+^n$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的递增的凸的和正齐次的映射.

那么函数 $\varphi(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是 E 上的一个半范数: 性质 S_1 是显然的; S_2 由 φ 的正齐次性得到; 而 S_3 由 φ 的递增性和次可加性推得.

例如, 对于所有的数 $\alpha\geqslant 1, (\sum p_i^\alpha)^{1/\alpha}$ 是一个半范数.

与半范数关联的拟距离 2-4 设 E 是赋以了半范数 p 的一个向量空间; 对 $x,y\in E$, 令

$$d(x,y)=p(x-y).$$

直接就得到

1° $\quad d(x,y)\geqslant 0$ 和 $d(x,x)=0$;

2° $\quad$ 因为 $p(x-y)=p(y-x)$, 故 $d(x,y)=d(y,x)$;

3° $\quad d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

事实上, 这个不等式可以改写为

$$p(x-y)\leqslant p(x-z)+p(z-x),$$

而

$$(x-y)=(x-z)+(z-y)$$

从而不等式由 S_3 得到.

这三个性质表明 d 是 E 上的一个拟距离; 显然这个拟距离对于平移是不变的, 更一般地, 伸缩映射 $x\to\alpha x+b$ 对拟距离乘以 $|\alpha|$.

这个拟距离是有限的; 为使它是一个距离, 只需 $p(x-y)=0$ 蕴涵 $x-y=\mathrm{O}$, 换言之, E 的半范数是范数.

与半范数关联的球 2-5 保持前面的记号. 称 E 的满足关系 $d(a,x)<\rho$ 的点 x 的集合 $B(a,\rho)$ 为半径为 ρ 中心为 a 的 p **开球** (其中 $a\in E$, 而 $\rho>0$); 以同样的方式定义 p **闭球**, 只需把符号 $<$ 换为 $\leqslant$. 称 $B(\mathrm{O},1)$ 为 p **单位球**.

显然伸缩映射 $x\to\alpha x+b$ 变换 $B(\mathrm{O},\rho)$ 为 $B(b,|\alpha|\rho)$; 于是可以只限于研究中心为 O 的球.

命题 2-6 1° 所有中心为 O 的 p 开球是一个凸集, 并且对于每个等距 $x\to\alpha x$ 是稳定的, 其中 $|\alpha|=1$.

2° 为使 p 是一个范数, 必须且只需 $B(\mathrm{O},\rho)$ 不包含任何 1 维向量子空间.

证明 1° 由于 p 是凸的, 使得 $p(x)<\rho$ 的点 x 的集合 $B(\mathrm{O},\rho)$ 是凸集 (第二章, 命题 19-3).

关系 $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$ 表明如果 $|\alpha|=1$, 相似变换 $x\to\alpha x$ 是从 $B(\mathrm{O},\rho)$ 到自身的双射等距.

2° 如果在 E 内存在 $a\neq\mathrm{O}$, 使得 $p(a)=0$, 所有的点 λa 皆属于 $B(\mathrm{O},\rho)$; 反之, 如果 $p(a)\neq 0$, 则存在 λ, 使得 $\lambda a\notin B(\mathrm{O},\rho)$, 比如 $\lambda=2\rho/p(a)$. □

对于半径 $\rho>0$ 的闭球有同样的断言.

最后注意闭球 $B(\mathrm{O},0)$ 是 E 的一个向量子空间, 它仅当 p 是范数时退缩为 $\{\mathrm{O}\}$.

与半范数族关联的球 2-7 在第一章, 第 16 节, 我们曾经定义与 E 的任意集合上的距离关联的拓扑. 于是如果 E 是赋以了范数的向量空间, 那么与这个范数关联的距离在 E 上定义一个拓扑. 在 4,5,6 各节, 我们将详尽研究这样的拓扑; 目前我们将以更一般的方式, 定义与向量空间上的一个半范数族关联的拓扑.

设 E 是一个向量空间, 而 $\mathscr{P}=(p_i)_{i\in I}$ 是 E 上的半范数的一个有限或无限的族. 用 $B_i(a,\rho)$ 表示半径为 ρ 中心为 a 的 p_i 开球.

称所有中心为 a 的 p_i 开球的有限交集为**中心为 a 的 $\mathscr{P}$ 开球** (两个中心为 a 的 $\mathscr{P}$ 开球的交集还是中心为 a 的 $\mathscr{P}$ 开球).

考虑 $\mathscr{P}$ 的元素是一个半范数 p 的倍数 λp (其中 $\lambda>0$) 这个特殊情形, 就会明白不能谈论一个 $\mathscr{P}$ 球的半径.

$\mathscr{P}$ 拓扑的定义 现在说 E 的一个子集 X 是 "开集", 如果或者 $X=\varnothing$, 或者对于所有 $x\in X$, 存在包含于 X 中的一个中心为 x 的 $\mathscr{P}$ 开球.

显然这些 "开集" 满足拓扑空间的公理 $\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_2,\mathrm{O}_3$; 于是可以给出下列定义:

定义 2-8 设 E 是一个向量空间, 而 $\mathscr{P}$ 是 E 上的半范数的任意一个族. 称 E 上的这样的拓扑为 **$\mathscr{P}$ 拓扑或与 $\mathscr{P}$ 族关联的拓扑**, 如果该拓扑的开集是这样的集合 X, 它的所有的点是一个包含于 X 的 $\mathscr{P}$ 开球的中心.

我们指出, 对于这个拓扑, 所有 p_i 开球是一个开集; 事实上, 设 $x\in B_i(a,\rho)$; 开

球 $B_i(x,\varepsilon)$ 包含于 $B_i(a,\rho)$, 其中 $\varepsilon=\rho-p_i(a-x)$, 这是因为

$$p_i(x-y)<\rho-p_i(a-x)$$

蕴涵

$$p_i(a-y)\leqslant p_i(a-x)+p_i(x-y)<\rho.$$

根据公理 O_2, 由此推导出所有 $\mathscr{P}$ 开球是一个开集; 根据公理 O_1, 所有 $\mathscr{P}$ 球并集是一个开集.

反之, 开集的定义蕴涵所有开集是 $\mathscr{P}$ 球的并集. 于是 E 的开集和 $\mathscr{P}$ 开球的并集之间等同.

$\mathscr{P}$ 拓扑的定义表明点 a 的所有邻域包含一个中心为 a 的 $\mathscr{P}$ 开球; 于是 E 的所有点 a 有中心为 a 的 $\mathscr{P}$ 开球组成的邻域基, 这就是形式如 $a+B$ 的集合, 其中 B 是中心为 O 的 $\mathscr{P}$ 开球.

命题 2-9 向量空间 E 上的所有 $\mathscr{P}$ 拓扑同 E 的向量空间的结构是相容的.

证明 我们要验证命题 1-2 的条件 1°, 2°, 3°, 4°; 为此用 B 表示中心为 O 的任意 $\mathscr{P}$ 开球.

1° 对于所有 $a,b\in E$, 球 $a+\frac{1}{2}B$ 和 $b+\frac{1}{2}B$ 是 a 和 b 的邻域, 考虑到 B 的凸性, 我们有:

$$\left(a+\frac{1}{2}B\right)+\left(b+\frac{1}{2}B\right)=(a+b)+\frac{1}{2}(B+B)\subset(a+b)+B,$$

由此得到映射 $(x,y)\to(x+y)$ 在点 (a,b) 的连续性.

2° 如果 $B=\bigcap\limits_{i\in J}B_i(\mathrm{O},\rho_i)$, 条件 $\lambda a\in B$ 表示成

$$|\lambda|p_i(a)\leqslant\rho_i,\quad \text{对于所有 } i\in J, \text{于是 } |\lambda|\leqslant\inf_{i\in J}\left(\rho_i p_i(a)^{-1}\right).$$

即 $|\lambda|\leqslant k$, 其中 $k>0$.

3° 如果 $\alpha=0$, 条件 $\alpha x\in B$ 对于所有 x 满足; 如果 $\alpha\neq 0$, 条件 $\alpha x\in B$ 改写为 $x\in\alpha^{-1}B$, 而 $\alpha^{-1}B$ 必然是 O 的邻域.

4° 一旦 $|\lambda|\leqslant 1$ 和 $x\in B$, 条件 $\lambda x\in B$ 就满足. □

滤子基的收敛准则 在一个距离空间 E 里, 我们说 E 的点的一个序列 (x_n) 收敛到 E 的一个点 a, 等价于说

$$\lim_{n\to\infty}d(a,x_n)=0;$$

在 E 是一个赋范空间并且赋以了与它的范数 p 关联的距离的特殊情形下, 这个条件改写为

$$\lim_{n\to\infty}p(a-x_n)=0.$$

我们将会看到这个条件以简单的方式推广到 $\mathscr{P}$ 拓扑.

命题 2-10 设 $\mathscr{B}$ 是赋以了 $\mathscr{P}$ 拓扑的向量空间 E 的一个滤子基. 则 $\mathscr{B}$ 收敛到 E 的一个点 a 等价于对于所有 $p \in \mathscr{P}$, 有 $\lim\limits_{\mathscr{B}} p(x-a) = 0$.

证明 一方面, 中心为 a 的 $\mathscr{P}$ 开球构成 a 的一个邻域基, 故 $\mathscr{B}$ 收敛于 a 等价于: 对于中心为 a 的所有 $\mathscr{P}$ 开球 B, 存在一个 $X \in \mathscr{B}$, 包含于 B 内.

另一方面, $\lim\limits_{\mathscr{B}} p(x-a) = 0$ 等价于对于所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $X \in \mathscr{B}$, 包含于球 $\{x : p(x-a) < \varepsilon\}$.

于是对于所有 $p \in \mathscr{P}, \lim\limits_{\mathscr{B}} p(x-a) = 0$, 等价于对于所有形式如 $\{x : p_i(x-a) < \varepsilon_i\}$ 的球的有限族, 存在一个 $X \in \mathscr{B}$, 包含于它们中的每一个, 从而包含于它们的交集. 由于所有中心为 a 的 $\mathscr{P}$ 开球都是这样的交集, 这就必然保证了所断言的等价性. □

例 2-11 设 (f_i) 是向量空间 E 上的一族线性型; 半范数 $|f_i|$ 族定义 E 上的一个 $\mathscr{P}$ 拓扑, 称之为**关联于线性型族 f_i 的弱拓扑**. 如果 $\mathscr{B}$ 是 E 上的一个滤子基, 那么以下两个说法是等价的:

$$\lim_{\mathscr{B}} f_i(x-a) = 0, \qquad \text{以及} \qquad \lim_{\mathscr{B}} |f_i(x-a)| = 0.$$

于是根据命题 2-10, $\mathscr{B}$ 对于关联于线性型 f_i 的弱拓扑收敛于 a, 等价于: 对于所有 f_i

$$\lim_{\mathscr{B}} f_i(x-a) = 0, \qquad \text{或} \qquad \lim_{\mathscr{B}} f_i(x) = f(a).$$

命题 2-12 (线性型的连续性准则) 设 E 是赋以了 $\mathscr{P}$ 拓扑的向量空间. 则 E 上的线性型 f 是连续的, 等价于存在 $\mathscr{P}$ 的一个有限子族 $(p_i)_{i \in J}$ 和一个常数 $k > 0$, 使得

$$|f| \leqslant k \sup_{i \in J} (p_i).$$

证明 1° 上述关系蕴涵在开球 $\{x : p_i(x) < 1\}_{i \in J}$ 的交集上有 $|f(x)| \leqslant k$. 于是根据命题 1-9,f 是连续的.

2° 反之, 如果 f 是连续的, 则存在中心为 O 的 $\mathscr{P}$ 开球 B, 使得在这个开球上有 $|f(x)| \leqslant 1$.

对于所有 $x \in E$, 存在一个 $\lambda > 0$, 使得 $x \in \lambda B$; 而对于这样的 λ 有 $|f(x)| \leqslant \lambda$. 而 B 有形式

$$B = \bigcap_{i \in J} \{x : p_i(x) < \varepsilon_i\}.$$

对于所有 $\lambda > 0$, 只要 $p_i(x) < \lambda \varepsilon_i$ (其中 $i \in J$), 即只要

$$\text{对于所有} i \in J, \quad \varepsilon_i^{-1} p_i(x) < \lambda,$$

就有 $|f(x)| \leqslant \lambda$.

由此推导出

$$|f(x)| \leqslant \sup_{i\in J}\left(\varepsilon_i^{-1}p_i(x)\right),$$

故

$$|f| \leqslant k\sup_{i\in J}(p_i), \qquad (\text{其中 } k=\sup\varepsilon_i^{-1}). \qquad \square$$

连续线性型的存在性 2-13 到目前为止, 我们还没有任何手段证明: 在赋以 $\mathscr{P}$ 拓扑的向量空间上, 存在不恒等于零的连续线性型. 在习题 11 至 16 题中将借助强有力的 Hahn-Banach 定理找到这个存在性的证明.

子空间 2-14 设 E 是一个向量空间, 而 F 是 E 的向量子空间. 对于 E 上的所有半范数 p, p 在 F 上的迹 (即 p 在 F 上的限制) 是 f 上的半范数 q; 对于所有 $a\in F$, 中心为 a 半径为 ρ 的 p 开球在 F 上的迹 (即 F 与该球的交集) 是中心为 a 半径为 ρ 的 q 开球.

于是对于 E 上的半范数的所有的族 (p_i), 关联于族 (p_i) 的拓扑在 F 上的迹等同于 F 上的关联于 p_i 的迹的族 (q_i) 的拓扑.

乘积空间 2-15 设 E,F 是同一个数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间, 而 $(p_i),(q_i)$ 分别是 E 和 F 上的半范数的两个族. 空间 E 和 F 赋以了对应的 $\mathscr{P}$ 拓扑. 于是乘积空间 $E\times F$ 同时赋以了向量空间结构和一个作为 E 和 F 的拓扑的乘积的拓扑结构 (参见第一章, 第 20 节).

此外, 函数 $(x,y)\to p_i(x)$ 和 $(x,y)\to q_j(y)$ 构成 $E\times F$ 上的一个半范数族 (参见 2-3 中 6°), 从而一个 $\mathscr{P}$ 拓扑与它关联. 我们将发现这个 $\mathscr{P}$ 拓扑跟 E 和 F 的拓扑乘积等同.

事实上, 关联于 $E\times F$ 上的半范数的中心为 O 的开球是形式如 $\{(x,y):p_i(x)<\varepsilon_i\}$ 或 $\{(x,y):q_j(y)<\varepsilon_j\}$ 的开球的有限交集; 换句话说, 这些球仅是中心为 O 的 E 的开球和中心为 O 的 F 的开球的乘积. 由于这些乘积构成 O 对于乘积拓扑的邻域的一个基, 所断言的等同性随之得证.

这个结果显然可以推广到向量空间的所有有限乘积.

命题 2-16 (分离性准则) *为了使向量空间 E 上的 $\mathscr{P}$ 拓扑是分离的, 必须且只需对于 E 的所有 $x\neq \text{O}$, 存在一个半范数 $p\in\mathscr{P}$, 使得 $p(x)\neq 0$.*

证明 1° 如果存在 $x\neq\text{O}$, 使得对于所有 $p\in\mathscr{P}$ 有 $p(x)=0$, 则所有中心为 O 的 $\mathscr{P}$ 开球含有 x, 故点 O 跟 x 不能用两个不交的开集分离.

2° 现在假定对于 E 的所有的点 $x\neq\text{O}$, 存在一 $p\in\mathscr{P}$, 使得 $p(x)\neq 0$; 那么对于 $\rho=\frac{1}{2}p(x)$, p 开球 $B(\text{O},\rho)$ 和 $B(x,\rho)$ 是不交的, 于是 O 和 x 被两个开集分离.

更一般地, 任意两个不同的点有形式 $y, y+x$, 其中 $x\neq\text{O}$, 于是沿用前面的记号, p 开球 $B(y,\rho)$ 和 $B((y+x),\rho)$ 分离这两个点. $\square$

命题 2-17 (可度量化的 $\mathscr{P}$ 拓扑) *设 $\mathscr{P}$ 是 E 上的半范数的有限或可数族.*

1° 如果 $\mathscr{P}$ 是有限的, 则与半范数

$$\sup p_i, \left(\sum p_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \sum p_i$$

任何一个关联的拓扑等同于 $\mathscr{P}$ 拓扑.

2° 如果 $\mathscr{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 则 $\mathscr{P}$ 拓扑等同于 E 上的关联于拟范数

$$d(x,y) = \sum_n 2^{-n} p_n'(x-y), \quad \text{其中 } p_n' = \inf(1, p_n)$$

的拓扑.

证明　1° 设 $\mathscr{P}$ 有 r 个元素, 我们有

$$\sup p_i \leqslant \left(\sum p_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum p_i \leqslant r \sup p_i.$$

于是关联于三个半范数的拟距离在 E 上定义同样的拓扑 (第一章, 命题 16-10).

另外, E 的球 $\bigcap_i B_i(\mathrm{O}, \varepsilon)$ 构成 O 的邻域基; 而一个这样的球只不过是关联于半范数 $p = \sup p_i$ 的半径为 ε 的球; 故 $\mathscr{P}$ 拓扑等于 p 拓扑.

2° 令

$$d_r(x,y) = \sum_{n\leqslant r} 2^{-n} p_n'(x-y).$$

关系 $d(x,y) < \varepsilon$ 蕴涵 $d_r(x,y) < \varepsilon$; 故中心为 O 半径为 ε 的 d_r 球包含同样中心和同样半径的 d 球.

反之, 关系 $d_r(x,y) < \frac{1}{2}\varepsilon$ 蕴涵

$$d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{r+1}^{\infty} 2^{-n},$$

故半径为 ε 的 d_r 球包含半径为 $\frac{1}{2}\varepsilon$ 的 d_r 球, 只要 $\varepsilon 2^{r-1} \geqslant 1$.

而对于 $\mathscr{P}$ 拓扑, 中心为 O 的 d_r 开球构成 O 的邻域基, 这是因为对于所有 r, 关联于 d_r 的拓扑和关联于 $\sum_{n\leqslant r} p_n$ 的拓扑是等同的; 由此得到要验证的等同性. □

最后我们注意到 d 不是关联于一个半范数的拟距离, 这是由于 d 是有界的. 即使改变证明的模式, 也得不到这样的半范数, 因为确实存在由半范数的可数族定义的 $\mathscr{P}$ 拓扑, 不能用一个半范数定义 (参见习题的 17 题).

推论 2-18　如果 $\mathscr{P}$ 是有限的或者可数的, 并且 $\mathscr{P}$ 拓扑是分离的, 则这个拓扑是可距离化的.

事实上, 我们刚刚看到在这两个条件之下, $\mathscr{P}$ 拓扑由一个拟距离定义; 如果它是分离的, 则这个拟距离就是距离.

$\mathscr{P}$ 拓扑的作用 2-19　存在拓扑向量空间, 其拓扑不是 $\mathscr{P}$ 拓扑 (参见习题的 3 题), 但是这样的拓扑到目前还没有在分析中发挥任何作用.

事实上, 一方面, 具有 $\mathscr{P}$ 拓扑的拓扑向量空间对于分析的大部分需要应付裕如; 另一方面, 这是仅有的已知的拓扑向量空间类, 在里面能够建立内容丰富和应用广泛的定理.

赋以 $\mathscr{P}$ 拓扑的向量空间经常叫做**局部凸空间**, 这是因为在这样的空间里, 点 O 有一个凸邻域基; 并且, 反之, 可以证明所有 e.t.v 的拓扑如果具有这个性质, 都是一个 $\mathscr{P}$ 拓扑.

§3. 拓扑向量空间的经典实例

现在我们要研究几类经典的拓扑向量空间; 这些都是赋以 $\mathscr{P}$ 拓扑的空间; 换句话说, 在每种情形涉及的都是定义与对象匹配的半范数族, 以彰显该对象.

3-1 作为回忆, 我们再次提起从任意集合 X 到 $\mathbb{K}$ 内的**有界**映射的向量空间 $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, 给它赋以一致收敛范数

$$\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|.$$

当 X 是一个紧致拓扑空间时, 连续函数的空间 $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ 是 $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ 的特别重要的子空间.

3-2 $\mathscr{C}^r([0,1],\mathbb{K})$ 是从 $[0,1]$ 到 $\mathbb{K}$ 内的映射的空间, 这些映射具有直到 r (这里 $r\in\mathbb{N}$) 阶的连续导数. 在这个空间里, 我们定义对于阶数小于等于 r 的每个导数一致收敛的拓扑, 为此给这个空间赋以下列半范数 p_i 的族:

$$p_i(f) = \sup_{t\in[0,1]}|f^{(i)}(t)|, \qquad \text{其中 } i=0,1,\cdots,r.$$

根据命题 2-16, 这个拓扑还可以用单独一个范数定义:

$$p(f) = \sum_0^r p_i(f).$$

同样对于从方块 $[0,1]^n$ 到 $\mathbb{K}$ 的有直到 r 阶的所有连续偏导数的映射的空间 $\mathscr{C}^r([0,1]^n,\mathbb{K})$, 用下列半范数定义其拓扑:

$$p_i(f) = \sup|D^i f(t)|.$$

其中 D^i 是总阶数 $|i|\leqslant r$ 的单个导数.

注意如果 $r=0$, 则空间 $\mathscr{C}^r([0,1]^n,\mathbb{K})$ 跟 $\mathscr{C}([0,1]^n,\mathbb{K})$ 等同.

3-3 用 $\mathscr{C}^\infty([0,1]^n,\mathbb{K})$ 表示定义在 $[0,1]^n$ 上在 $\mathbb{K}$ 取值的无穷次可导函数的空间, 给它赋以在 3-2 定义的半范数.

根据命题 2-16, 跟这个半范数族关联的拓扑可以用一个距离定义; 不过为了验证一个滤子基的收敛性, 应用命题 2-10 指出的准则比用这个距离要简单和直观得多.

3-4 这里是一族与前面类似的空间: 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧致集; 用 $\mathscr{D}_K^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ 表示从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{K}$ 的映射的空间, 这些映射有直到 r 阶的连续偏导数, 而在紧致集 K 之外为零, 当不致引起混淆时这个空间可以更简单地记做 $\mathscr{D}_K^r$.

跟 3-2 一样, 给这个空间赋以下列半范数:

$$p_i(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |D^i f(t)|.$$

用类似的方式定义空间 $\mathscr{D}_K^r([0,1]^n, \mathbb{K})$.

3-5 设 p 是一个大于等于 1 的实数; 对于 $\mathbb{K}$ 的元素的所有无穷序列 $x = (x_i)$, 用

$$\|x\|^p = \sum_i |x_i|^p$$

定义有限或无穷正数 $\|x\|$.

由 Minkowski 不等式 (第二章, 20-7) 推导出:

$$\left(\sum_0^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_0^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_0^n |y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

由此得到

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

从这个不等式和显然的关系 $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ 得知使得 $\|x\| < \infty$ 的 x 的集合是一个向量空间, 并且 $\|x\|$ 是这个空间上的一个半范数; 此外仅当对于每个 $i, x_i = 0$ 时 $\|x\|$ 是零, 故 $\|x\|$ 是这个空间上的一个范数.

用 l^p 表示赋以此范数的这个 (实或复的) 空间. 特殊的, 空间 l^1 可以等同于绝对收敛级数的空间; 至于 l^2, 当研究 Hilbert 空间时还会碰到. 在 8-9 将证明这个空间对于关联于它们的范数的度量是完备的.

3-6 这里是一个重要的空间, 仅当我们懂得积分理论后才能在最一般的形式下定义它.

仍然设 p 是一个大于等于 1 的实数; 对于所有 $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{K})$ 由

$$\|f\|^p = \int_0^1 |f(t)|^p dt$$

定义正实数 $\|f\|$.

对于 $[0,1]$ 的点的所有有限递增序列 $\sigma = (t_1, t_2, \cdots, t_n)(t_1 = 0, t_n = 1)$, 由

$$\|f\|_\sigma^p = \sum_i (t_{i+1} - t_i)|f(t_i)|^p$$

定义 $\|f\|_\sigma$. Minkowski 不等式表明 $\|f+g\|_\sigma \leqslant \|f\|_\sigma + \|g\|_\sigma$.

当 σ 的模 (参见第一章, 24-6) 趋于 0 时, $\|f\|_\sigma$ 趋于 $\|f\|$; 由此推导出 $\|f+g\| \leqslant \|f\|+\|g\|$.

这个不等式结合 $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ 和 $\|f\|$ 仅当 $f = \mathrm{O}$ 时为零的事实, 表明 $\|f\|$ 是 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ 的一个范数; 当 $p=1$ 时, 称它为平均收敛范数; 对于 $p=2$, 称它为均方收敛范数.

现在我们开始讨论以下两个例子中的在所有紧致子集上一致收敛拓扑.

3-7 设 X 是一个分离拓扑空间; 对于所有紧致子集 $K \subset X$, 所有 $f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ 在 K 上是有界的; 故如果令

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

那么 p_K 是 $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ 上的一个半范数. 由 p_K 的族定义的 $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ 的 $\mathscr{P}$ 拓扑称为在所有紧致集上一致收敛的拓扑 (更简短地称为**紧致一致收敛拓扑**). 对于所有 $f \neq \mathrm{O}$, 存在一个紧致集 K 使得 $p_K(f) \neq 0$, 故这个拓扑是分离的.

根据命题 2-10, 如果 $(f_i)_{i\in I}$ 是 $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ 的元素的一个族, 而 $\mathscr{B}$ 是 I 上的一个滤子基, 那么对于这个拓扑, f_i 沿滤子基 $\mathscr{B}$ 收敛到 f, 意味着对于所有紧致子集 $K \subset X$, f_i 在 K 上一致收敛到 f.

用 (p_K) 的一个定义同样拓扑的子族代替它经常会带来方便: 如果 (K_j) 表示 X 的一个吸收紧致族, 其意思是每个紧致集 K 包含于一个 K_j 内, 容易验证族 p_{K_j} 和 p_K 定义同一拓扑.

对于 $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ 的所有向量子空间 E, $\mathscr{C}(X,\mathbb{K})$ 的拓扑在 E 上的迹也称为紧致一致收敛拓扑.

比如, 设 D 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个区域 (连通开集), 而 $\mathscr{H}(D)$ 是 D 上的全纯函数空间[①]. $\mathscr{H}(D)$ 上的最有用的拓扑是在所有紧致集上一致收敛的拓扑; 由在 D 内存在紧致集的吸收的和可数的族的事实得到 $\mathscr{H}(D)$ 的拓扑可以用一族可数拟距离定义; 由于这个拓扑是分离的, 它是可度量化的 (参见命题 2-16).

3-8 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集, 而 r 是一个大于等于 0 的整数; 用 $\mathscr{E}^r(A,\mathbb{K})$ 表示 $\mathscr{C}(A,\mathbb{K})$ 的由具有直到 r 阶的连续偏导数的函数组成的子空间.

对于所有紧致集 $K \subset A$ 和所有总阶数 $|i| \leqslant r$ 的单个导数 D^i, 令

$$p_{K,i}(f) = \sup_{t \in K} |D^i f(t)|.$$

由半范数 $p_{K,i}$ 的族在 $\mathscr{E}^r(A,\mathbb{K})$ 上定义的拓扑称为对于阶数小于等于 r 的所有导数一致收敛的拓扑.

---

①从 D 到 $\mathbb{C}$ 的一个映射称为全纯的, 如果在 D 的所有点 (a_i) 的一个邻域内, f 等于对于变量 $(z_i - a_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的绝对收敛的整次幂级数的和.

跟前面的例子一样, 可以要求 K 属于一个可数的和吸收的族, 这样 $\mathscr{E}^r(A,\mathbb{K})$ 的拓扑就是可度量化的.

用类似的方式定义 $\mathscr{E}^\infty(A,\mathbb{K})$; 它的拓扑也是可度量化的.

3-9 用 $\mathscr{D}^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ 表示 $\mathscr{C}^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ 的由在一个紧致集外为零并且具有直到 r 阶的连续偏导数的函数组成的子空间.

用如下定义的半范数 $p_{\varphi,i}$ 定义这个空间的拓扑:

D^i 是总阶数 $|i| \leqslant r$ 的一个偏导数; φ 是 $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ 的任意一个元素; 令

$$p_{\varphi,i}(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}^n} |\varphi(t)D^i f(t)|.$$

可以证明, 与前面的拓扑相反, 这样定义的拓扑不是可度量化的.

可以用类似的方式定义 $\mathscr{D}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ 的拓扑, 但是在这个空间上有用的拓扑应该用其他的半范数来定义.

现在举两个弱拓扑的例子.

3-10 再回到从一个集合 X 到 $\mathbb{K}$ 内的映射的空间 $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. 对于所有 $a \in X$, 函数 $f \to f(a)$ 是一个线性型; 在 $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ 上的用半范数 $f \to |f(a)|$ 定义的拓扑称为 X **上的简单收敛拓扑**. 这是一个弱拓扑; 于是 (参见例 2-11) 说一个函数族 f_i (沿一个滤子基) 简单收敛到函数 f, 等价于说对于所有 $x \in X$, $f_i(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中收敛到 $f(x)$.

3-11 设 E 是一个拓扑向量空间; 而 E' 是其拓扑对偶. E 上的关联于线性型 $l \in E'$ 的集合的弱拓扑称为 E 的**本义弱拓扑**, 或干脆简单地称为 E 的弱拓扑. 当对于 $x \in E, x \neq \mathrm{O}$, 存在 $l \in E'$, 使得 $l(x) \neq 0$ 时, 换言之, 当在第二章的定义 12-3 的意义下, E 上的连续线性型分离 E 的点时, 这个拓扑是分离的.

在 E 里, x_i 弱收敛到一个点 x, 等价于对于所有 $l \in E'$, $l(x_i)$ 收敛到 $l(x)$.

在研究 Hilbert 空间时还会碰到这个弱拓扑.

以类似方式, 一个拓扑向量空间 E 的对偶 E', 赋以关联于线性型 $\varphi_a : l \to l(a)$ 的集合的弱拓扑非常有用, 其中 a 是 E 的任意的点.

在 5, 30, 32, 59 等习题中将发现不怎么经典的拓扑向量空间的例子.

这些拓扑向量空间的用途 在函数空间里精心选择的拓扑不仅有了方便的语言, 而且提供了利用拓扑向量空间的理论和概念的可能性.

此外, 拓扑向量空间还派生出由对偶空间 E' 的元素构成的新数学对象的定义. 以下是两个重要的例子.

3-12 设 X 是一个紧致拓扑空间; 赋以了一致收敛拓扑的 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ 的对偶空间的元素称为**实** Radon **测度**.

最著名的 Radon 测度是 $[0,1]$ 的 Lebesgue 测度, 它 (对于 $X=[0,1]$) 由下列连续线性型定义:

$$f\to\int_0^1 f(t)dt.$$

在研究积分时还要回到 Radon 测度.

3-13 $\mathscr{D}^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 的对偶的元素称为 r **阶实分布**. 它是 Schwarz 分布的特殊情形.

0 阶分布是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Radon 测度.

II. 赋 范 空 间

赋范空间在 Hilbert 空间之后引入分析, 在发展了拓扑向量空间的一般理论之前, 就已经被人们广泛研究, 其中尤以 Banach 贡献最大.

虽然在发现关联于半范数族的拓扑之后, 赋范空间的重要性有所减弱, 它仍不失为一个重要的工具, 并且它的研究要相对简单.

§4. 关联于范数的拓扑. 连续线性映射

定义 4-1 称赋以了一个范数的任一向量空间 E 为**赋范空间**. 如果一个赋范空间对于与其范数关联的距离是完备的, 则称之为 Banach **空间**

例如, 赋以了一致收敛范数的 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ 是一个 Banach 空间, 因为它是完备的 (第一章, 22-7); 反之, 赋以平均收敛范数的同一个空间不是完备的 (像在第三章 14-7 中那样说明理由).

我们提醒所有的范数有限族的和与上包络仍然是一个范数.

还要提醒 E 上的与一个范数 p 关联的距离由下式定义:

$$d(x,y)=p(x-y).$$

与这个距离关联的拓扑称为赋范空间 E 的拓扑; 根据命题 2-9, 这个拓扑与 E 的向量空间结构是相容的; 我们要重新证明这个结果, 并且把它精确化.

命题 4-2 设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的一个赋范空间.

1° 从 $\mathbb{K}\times E$ 到 E 内的映射 $(\lambda,x)\to\lambda x$ 是连续的;

2° 从 $E\times E$ 到 E 内的映射 $(x,y)\to x+y$ 是比为 2 的 Lipschitz 映射;

3° 从 E 到 $\mathbb{R}$ 内的映射 $x\to\|x\|$ 是比为 1 的 Lipschitz 映射

证明　1° 我们有

$$\Delta(\lambda x) = (\lambda + \Delta\lambda)(x + \Delta x) - \lambda x = \Delta\lambda \cdot x + \lambda\Delta x + \Delta\lambda \cdot \Delta x,$$

由此得到

$$\|\Delta(\lambda x)\| \leqslant |\Delta\lambda| \cdot \|x\| + |\lambda| \cdot \|\Delta x\| + |\Delta\lambda| \cdot \|\Delta x\|.$$

于是当 $|\Delta\lambda|$ 和 $\|\Delta x\|$ 趋于 0 时, $\|\Delta(\lambda x)\|$ 趋于 0; 故得映射 $(\lambda, x) \to \lambda x$ 的连续性.

不过, 这个映射当 E 不退缩为 O 时不是一致连续的; 事实上, 设 E 内的 $a \neq \mathrm{O}$, 令 $x = \lambda a$; 映射 $(\lambda, \lambda) \to \lambda^2$ 不是一致连续的, 故映射 $(\lambda, x) \to \lambda \cdot \lambda a = \lambda^2 a$ 也不是.

2° 关系

$$\Delta(x + y) = (x + \Delta x) + (y + \Delta y) - (x + y) = \Delta x + \Delta y,$$
$$\|\Delta x + \Delta y\| \leqslant \|\Delta x\| + \|x + \Delta y\|$$

表明映射 $(x, y) \to x + y$ 是 (对于 $E \times E$ 上通常的范数) 是比为 2 的 Lipschitz 映射.

3° 关系 $\Big|\|x + \Delta x\| - \|x\|\Big| \leqslant \|\Delta x\|$ 表明函数 $\|x\|$ 是比为 1 的Lipschitz 映射. □

连续线性映射　在所有赋范空间里的原点有由同一个球的位似形组成的邻域基, 这个事实使得可以简单地刻画从一个赋范空间到另一个的连续线性映射的特征.

定理 4-3　*设 E, F 是两个赋范空间, 而 f 是从 E 到 F 内的一个线性映射. 则以下三个断言是等价的:*

1° f 是连续的;

2° f 在 E 的所有有界集上是有界的;

3° 存在一个常数 $k > 0$, 使得对于所有 $x \in E$ 有

$$\|f(x)\| \leqslant k\|x\|.$$

当这些条件之一满足时, f 是 Lipschitz 映射

证明　首先提醒: 说距离空间的一个子集 X 是有界的, 就是说它的直径是有限的; 在一个赋范空间里, 这个条件更简单地诠释为 X 包含于中心为 O 的一个球里.

1° ⇒ 2°　f 在 O 的连续性蕴涵在 E 内存在一个球 $B(\mathrm{O}, \rho)$, 使得它在 f 下的像包含于 F 的单位球里. 通过位似变换, 中心为 O 的任意的球 X 在 f 下的像包含于 F 的一个球里; 从而 E 的任意有界集也如此.

2° ⇒ 3°　E 的单位球面 $S = \{x : \|x\| = 1\}$ 是有界的; 故 $f(S)$ 是有界的, 换句话说, 存在一个常数 $k \geqslant 0$, 使得

$$\text{对于所有} x \in S, \qquad \|f(x)\| \leqslant k = k\|x\|.$$

而 E 的所有的点 y 有形式 λx, 其中 $x\in S$, 而 $\lambda\geqslant 0$; 关系 $\lambda\|f(x)\|\leqslant k\lambda\|x\|$ 可以写成

$$\text{对于所有}y\in E \qquad \|f(y)\|\leqslant k\|y\|.$$

$3^\circ\Rightarrow 1^\circ$ 事实上,$\|f(x)\|\leqslant k\|x\|$ 蕴涵

$$\|f(u)-f(v)\|=\|f(u-v)\|\leqslant k\|u-v\|.$$

故 f 是比为 k 的 Lipschitz 映射, 从而也是连续映射. □

等价范数 在第一章的第 16 节我们曾经看到同一个拓扑可以定义两个不等价的距离 d_1,d_2, 其含义是 $d_1(x,y)$ 和 $d_2(x,y)$ 不同时趋于 0; 我们将看到这个奇异性对于关联于范数的距离不会发生.

定义 4-4 说向量空间 E 上的两个范数是**等价的**, 如果关联于这些范数的拓扑是等同的.

这显然是一个等价关系, 把它记做 $\sim$.

命题 4-5 设 p_1,p_2 是向量空间 E 上的两个范数. 则

$$(p_1\sim p_2)\Leftrightarrow(\exists k_1,k_2\in\mathbb{R}_+,\text{使得}p_2\leqslant k_1p_1\text{并且}p_1\leqslant k_2p_2).$$

证明 这是定理 4-3 的一个推论: 事实上, 说 $p_1\sim p_2$, 归结为从赋以范数 p_1 (对应地,p_2) 的 E 到赋以范数 p_2 (对应地,p_1) 的 E 的映射 $x\to x$ 是连续的; 换句话说, 存在两个数 $k_1,k_2\geqslant 0$, 使得

$$\text{对于所有}x\in E \qquad p_2(x)\leqslant k_1p_1(x)\text{ 并且 }p_1(x)\leqslant k_2p_2(x).$$

数 k_1,k_2 显然大于 0. □

Z 在第 7 节将证明在一个有限维向量空间上的所有范数是等价的. 反之, 这里有一个无穷维向量空间的例子, 它里面存在两个不等价的范数.

这是赋以一致收敛范数 p_1 和由

$$p_2(f)=\int_0^1|f(t)|dt$$

定义的范数 p_2 的 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$.

显然有 $p_2\leqslant p_1$; 但是反之, 如果用 f_n 表示单项式 $t\to t^n$, 则有

$$p_1(f_n)=1, \qquad \text{而} \qquad p_2(f_n)=(n+1)^{-1}.$$

故不存在任何常数 k 使得 $p_1\leqslant kp_2$.

$\mathscr{L}(E,F)$ 上范数的选择 我们尝试在从 E 到 F 内的连续线性映射的向量空间 $\mathscr{L}(E,F)$ 里找到一个范数, 它刻画 $\mathscr{L}(E,F)$ 的元素 f 的大小. 利用在整个 E 的一

致收敛范数完全在考虑的范围之外, 这是因为除去映射 O, $\mathscr{L}(E,F)$ 的任何元素 f 在 E 内都不是有界的. 反之, 我们曾经通过在 E 的单位球 B 上的有界性刻画连续线性映射 f. 另一方面, $\mathscr{L}(E,F)$ 的两个元素在这个单位球上重合则是恒等的; 这就引导我们利用在球 B 上的一致收敛范数, 换言之, 对于所有 $f\in\mathscr{L}(E,F)$:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|f(x)\| \qquad \text{或} \qquad \|f\|=\sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|.$$

这显然是一个半范数 (利用 2-3 中 5° 和 6°); 由于如果对于所有 $x\in B, f(x)=\mathrm{O}$, 则 $f=\mathrm{O}$, 故 $\|f\|$ 是一个范数.

定理 4-3 的蕴涵关系 ($2^\circ\Rightarrow 3^\circ$) 的证明表明: $\|f\|$ 是使得对于所有 $x\in E, \|f(x)\|\leqslant k\|x\|$ 的大于等于零的最小常数 k; 特别地可以写成 $\|f(x)\|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|$. 总结这里的讨论得到

命题 4-6　*函数 $f\to\|f\|$ 是 $\mathscr{L}(E,F)$ 上的一个范数. 对于所有 $f\in\mathscr{L}(E,F)$, $\|f\|$ 是使得对于所有 $x\in E$, 少有 $\|f(x)\|\leqslant k\|x\|$ 的大于或等于零的最小数 k.*

Z 如果我们用等价范数替换 E,F 的范数, 显然 $\|f\|$ 也用等价范数替换. 故 $\mathscr{L}(E,F)$ 的拓扑仅依赖 E 和 F 的拓扑.

当 E 和 F 的范数明确以后, 我们上面在 $\mathscr{L}(E,F)$ 上定义的范数是通常的范数. 由于这个定义的简单性, 以及它具有的下列性质, 它是特别便于应用的:

设 E,F,G 是三个赋范空间, 而 $f\in\mathscr{L}(E,F), g\in\mathscr{L}(F,G)$; 关系

$$\|g(f(x))\|\leqslant\|g\|\cdot\|f(x)\|\leqslant\|g\|\cdot\|f\|\cdot\|x\|$$

表明

$$\|g\circ f\|\leqslant\|g\|\cdot\|f\|.$$

故我们选择的范数尤其适合复合线性映射.

尽管如此, 在某些情形下, 用其他等价范数代替上面定义的范数可能是方便的. 比如, 对于任意从 $\mathbb{K}^n$ 到自身的在 $\mathbb{K}^n$ 的典则基下由矩阵 (a_{ij}) 定义的线性映射 f, 对应和数

$$\|f\|=\sum_{i,j}|a_{ij}|.$$

有时在 $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ 上就用这个范数; 它也满足不等式 $\|g\circ f\|\leqslant\|g\|\cdot\|f\|$.

命题 4-7　*当 F 是完备空间时, $\mathscr{L}(E,F)$ 也是完备的.*

证明　假定 F 是完备的, 而 (f_n) 是 $\mathscr{L}(E,F)$ 的一个 Cauchy 序列. 对于所有 $\varepsilon>0$, 存在 n_0, 使得 $(p,q\geqslant n_0)$ 蕴涵 $\|f_p-f_q\|\leqslant\varepsilon$; 于是对于所有 $x\in E$, 有

$$\|f_p(x)-f_q(x)\|\leqslant\|f_p-f_q\|\cdot\|x\|\leqslant\varepsilon\cdot\|x\|. \tag{1}$$

这表明序列 $f_n(x)$ 是 F 内的 Cauchy 序列. 故它有一个极限 $f(x)$.

由于 f 是线性映射的简单极限, 它也是线性的. 让我们固定 (1) 中的 p, 而令 q 趋于无穷; 则得

$$\|f_p(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|x\|. \tag{2}$$

这个不等式表明: 一方面, 跟 f_p 一样, f 在单位球上是有界的, 即 $f \in \mathscr{L}(E, F)$; 另一方面, 对于所有 $p \geqslant n_0, \|f - f_p\| \leqslant \varepsilon$, 这就证明了在 $\mathscr{L}(E, F)$ 中, f_n 收敛到 f.□

特别地, 由于 $\mathbb{K}$ 是完备的, 可以陈述

推论 4-8 所有赋范空间的对偶空间是完备的.

连续线性映射的延拓 在第一章 (定理 20-14) 曾经证明: 从距离空间 E 的一个处处稠密子集 X 到一个完备距离空间 F 的一致连续的映射可以延拓为从 E 到 F 内的连续映射.

这个一般的结果引导至下列断言.

命题 4-9 设 X 是赋范空间 E 的处处稠密的向量子空间, 而 f 是从 X 到一个完备赋范空间 F 的连续线性映射.

则存在唯一的从 E 到 F 内的连续映射 g, 它在 X 上的限制就是 f; 这个映射 g 是线性的, 并且 $\|g\| = \|f\|$.

证明 不等式 $\|f(u) - f(v)\| \leqslant \|f\| \cdot \|u - v\|$ 表明 f 是比为 $\|f\|$ 的 Lipschitz 映射; 根据第一章定理 20-14, f 具有到 E 上的唯一连续延拓 g, 并且 g 是比为 $\|f\|$ 的 Lipschitz 映射.

现在验证 g 是线性的:

设 $x, y \in E$; 它们分别是 X 的点的两个序列 (x_n) 和 (y_n) 的极限.

对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和所有数值 λ, μ 有:

$$g(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda g(x_n) + \mu g(y_n).$$

而加法和数值乘法在 E 和 F 内是连续的, 又 g 是连续的; 故这个关系中的每个成员当 $n \to \infty$ 时趋于极限; 故有

$$g(\lambda x + \mu y) = \lambda g(x) + \mu g(y).$$

即 g 是线性的.

g 是比为 $\|f\|$ 的 Lipschitz 映射可以表示为

$$\|g(x)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|.$$

即 $\|g\| \leqslant \|f\|$. 但是另一方面 g 是 f 的延拓, 故 $\|f\| \leqslant \|g\|$, 随之得到要找的等式. □

推论 4-10 从赋范空间 E 的向量子空间 X 到完备赋范空间 F 的连续线性映射可以延拓为唯一的从 $\overline{X}$ 到 F 的连续线性映射.

事实上, 利用命题 1-5, $\overline{X}$ 是 E 的向量子空间; 由于 X 在 $\overline{X}$ 内是处处稠密的, 故可以应用命题 4-9.

例 由于 $\mathbb{K}$ 是完备的, 断言 4-9 和 4-10 可以应用到连续线性映射的延拓.

注 4-11 下面的例子阐明 F 的完备性的条件是本质的.

设 E 是一个无限维完备赋范空间; 而 $X = F$ 是 E 的处处稠密且异于 E 的向量子空间 (比如 $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$, 而 X 是多项式组成的子空间). 取 f 是从 X 到 F 内的恒等映射. 可以验证 f 不具有到整个 E 的任何延拓.

连续线性映射的例子 4-12 1° 设 $\varphi \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$; 从 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ 到自身的映射 $f \to \varphi f$ 是连续的, 其范数是 $\|\varphi\|$. 为了使这个映射是同构, 必须且只需 φ 在 $[0,1]$ 的任何点都不变为零.

2° 对于所有 $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$, 用 Pf 表示 f 的在点 0 为零的原函数. 从 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ 到其自身的映射 $f \leftrightarrow Pf$ 是一个是单射, 并且范数为 1.

3° 设 A, B 是两个紧致空间, 而 φ 是从 A 到 B 内的连续映射. 从 $\mathscr{C}(B,\mathbb{K})$ 到 $\mathscr{C}(A,\mathbb{K})$ 内的映射 $f \to f \circ \varphi$ 是线性的, 并且范数为 1.

4° 设 (k_n) 是 $\mathbb{K}$ 的元素的一个序列, 使得 $|k_n| \leqslant k < \infty$; 从 l^p 到自身的映射 $(x_n) \to (k_n x_n)$ 是线性的, 并且其范数小于等于 k.

5° 从 l^p 到自身的映射 $(x_n) \to (x'_n)$ (其中 $x'_n = x_{n+1}$) 是连续的, 并且范数是 1.

这里给两个不连续的线性映射的例子:

6° 设 E 是 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ (赋以其通常的范数) 的由具有连续导数 f' 的函数 f 组成的子空间.

从 E 到 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ 的映射 $f \to f'$ 不是连续的, 比如, 如果令 $f_n(x) = n^{-1}\sin nx$, 则序列 f_n 收敛到 O, 但是 f'_n 不收敛到 O.

7° 设 p_1 是 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ 上的平均收敛范数, 而 p_2 是它通常的范数. 从赋以范数 p_1 的这个空间到赋以范数 p_2 的同一空间的恒等映射不是连续的.

Z 我们注意到在不连续映射的例子 6° 和 7° 中, 作为定义域的空间不是完备的. 这并非偶然; 事实上, 可以证明 (参见习题的 62 题) 从 Banach 空间到具有一定程度的正则性的赋范空间的所有线性映射必然是连续的. 诚然, 利用选择公理 (参见习题的 69 题), 可以定义无穷维的 Banach 空间上的不连续的线性型, 但是那里实际构造的是一个函数族, 而不仅仅是一个函数.

总之, 可以期待所有从一个 Banach 空间到一个赋范空间的用通常分析的手段

构造的线性映射是连续的.

完备赋范空间的特征刻画

这里是一个便于应用的准则:

命题 4-13 设 E 是一个赋范空间. 而 k 是任意一个满足 $0<k<1$ 的数. 以下三个性质是等价的:

1° E 是完备的.

2° 对于 E 的元素的所有使得 $\sum_n \|a_n\| < \infty$ 的序列 (a_n), 部分和序列 $s_n = \sum_0^n a_i$ 是收敛的.

3° 对于 E 的元素的所有使得对所有 $n, \|a_n\| \leqslant k^n$ 的序列 (a_n), 部分和序列 $s_n = \sum_0^n a_i$ 是收敛的.

证明 1° ⇒ 2°. 不等式

$$\|s_{n+p} - s_n\| \leqslant \sum_{n+1}^{n+p} \|a_i\| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} \|a_i\|,$$

其中右端是 $\|a_n\|$ 的收敛级数的余项, 表明序列 s_n 是 Cauchy 序列, 从而收敛.

2° ⇒ 3°. 这是因为 3° 是 2° 的特殊情形.

3° ⇒ 1°. 假定 3° 满足, 而 (x_n) 是 E 的一个 Cauchy 序列. 用归纳法, 可以找到序列 (x_n) 的子序列 (x_{i_n}), 使得对于所有 $p \geqslant i_n$, 有 $\|x_p - x_{i_n}\| \leqslant k^n$.

令

$$a_0 = a_{i_0} \qquad \text{而对于所有} n>0, a_n = (x_{i_{n+1}} - x_{i_n}).$$

显然有 $\|a_n\| \leqslant k^n$, 故部分和序列

$$s_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n+1})$$

收敛; 而 s_n 刚好是 x_{i_n}; 故 (x_n) 的子序列 (x_{i_n}) 收敛; 由于 (x_n) 是 Cauchy 序列, 故它收敛到同一个极限, 这就证明 E 是完备的. □

注 常数 k 的选取依赖所处的环境; 在积分论中, 选 $k = 1/4$ 往往是方便的.

§5. 单态射和同构的稳定性

我们先要明确所谓单态射和同构是什么意思.

定义 5-1 设 E, F 是两个赋范空间, 而 f 是从 E 到 F 的一个线性映射.

如果 f 是单射的且连续的, 并且从 $f(E)$ 到 E 上的映射 f^{-1} 是连续的, 则称 f 是一个**单态射**.

如果此外 $f(E) = F$, 则称 f 是**同构**.

命题 5-2 从 E 到 F 内的线性映射 f 是单态射等价于存在两个常数 $k_1, k_2 > 0$, 使得对于所有 $x \in E$, 有

$$k_1\|x\| \leqslant \|f(x)\| \leqslant k_2\|x\|.$$

证明 假定 f 是一个单态射; f 的连续性蕴涵 k_2 的存在性; f^{-1} 的连续性蕴涵 k_1 的存在性 (最好的常数 k_1 是 $\|f^{-1}\|^{-1}$).

反之, 如果 $k_1\|x\| \leqslant \|f(x)\|$, 则 f 是单射, 并且 f^{-1} 是连续的; 如果再有 $\|f(x)\| \leqslant k_2\|x\|$,$f$ 就是连续的. □

例 可以验证 4-12 的例中的映射 $f \to Pf$ 是连续的, 但不是一个单态射.

推论 5-3 $\mathscr{L}(E,F)$ 的由单态射组成的子集 I 是开集.

证明 假定 f 是一个单态射, 那么上面命题 5-2 中的那种类型的关系成立; 对于所有 $g \in \mathscr{L}(E,F)$, 如果 $\|g\| < k_1$, 则有

$$(k_1 - \|g\|)\|x\| \leqslant \|f(x) + g(x)\| \leqslant (k_1 + k_2)\|x\|.$$

由于 $k_1 - \|g\| > 0$, $(f+g)$ 是一个单态射. □

这个推论显现了单态射的某种稳定性, 因为它表明: 一个线性映射如果是单态射, 则它加上一个 "小的" 线性映射后, 仍然保持是单态射. 可以如下稍许推广这个结果:

命题 5-4 设 A 是任意距离空间; 而 f 是从 A 到一个赋范空间 F 的单射, 它至少乘距离一个因子 $K > 0$① (换言之, f^{-1} 是比为 K^{-1} 的 Lipschitz 映射); 设 g 是从 A 到 F 的另一个映射, 它是比为 $k < K$ 的 Lipschitz 映射.

则从 A 到 F 的映射 $(f+g)$ 是单射, 并且把距离至少乘以 $(K-k)$.

这是下列关系的直接推论.

$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| = \|(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))\| \geqslant (K-k)d(x,y).$$

我们再补充一句: 如果 f 是 Lipschitz 映射, 则 $f+g$ 也是如此.

以下的断言中将假定空间 F 是完备的, 并且在后面将带来重要的应用.

我们首先注意如果 f 表示从一个完备赋范空间 F 到自身的恒等映射, 而 g 表示从 F 到 F 内的范数小于 1 的线性映射, 则根据命题 5-2 不仅 $(f+g)$ 是一个单态射, 这个映射还把 F 变换到 F 上. 事实上, 对于所有 $a \in F$, 方程 $f(x)+g(x) = a$ 还可以写成 $x = a - g(x)$, 因为映射 $x \to a - g(x)$ 是压缩的, 故这个方程有一个解 (根据第一章, 定理 21-2).

我们将要做的包括: 用一个从完备空间 E 到 F 上的同构代替 f, 以及用一个比例系数充分小的 Lipschitz 映射代替 g, 然后 "局部化" 这些映射 f 和 g.

①其意义是 $\|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x-y\|, \forall x, y \in A$. ——译者注

引理 5-5 设 ω 是 Banach 空间 F 的一个开集, 而 g' 是从 ω 到 F 内的一个比为 $k'<1$ 的 Lipschitz 映射.

则 ω 在映射 $\gamma: y\to y+g'(y)$ 下的像是 F 的开集.

更准确地说, 所有闭球 $B(b,\rho)\subset\omega$ 在 γ 下的像包含于闭球 $B(\gamma(b),(1-k')\rho)$.

证明 显然只需证明断言的第二部分.

为了简化记号, 借助 ω (对应地, $\gamma(\omega)$) 的平移, 我们可以假定 $b=\mathrm{O}$(对应地, $\gamma(b)=\mathrm{O}$).

我们要证明对于所有 $c\in F$, 如果 $\|c\|\leqslant(1-k')\rho$, 则方程 $x+g'(x)=c$ 有一个满足 $\|x\|\leqslant\rho$ 的解.

把这个方程改写为 $x=c-g'(x)$; 映射 $x\to c-g'(x)$ 是比为 $k'<1$ 的 Lipschitz 映射, 并且把球 $B(\mathrm{O},\rho)$ 映射到自身里, 这是因为如果 $\|x\|\leqslant\rho$, 则有

$$\|c-g'(x)\|\leqslant\|c\|+\|g'(x)\|\leqslant(1-k')\rho+k'\rho=\rho.$$

由于 $B(\mathrm{O},\rho)$ 是一个完备距离空间, 第一章的定理 21-2(逐次逼近模式) 表明此方程有解. □

引理 5-6 设 A 是一个距离空间; 而 f 是从 A 到 Banach 空间 F 的一个单射, 它把距离至少乘以一个数 $K>0$, 并且 $f(A)$ 是 F 内的一个开集; 再设 g 是从 A 到 F 内的一个比为 $k<K$ 的 Lipschitz 映射.

则 A 在 $(f+g)$ 下的像是 F 的一个开集.

证明 令 $g'=g\circ f^{-1}$; 这是一个从 F 的开集 $\omega=f(A)$ 到 F 内的映射; 它是比为 $k'=k/K$ 的 Lipschitz 映射, 根据假设, 这个比例系数是小于 1 的.

如果用 f' 表示 F 的恒等映射, 则有

$$(f+g)(A)=(f+g)\left(f^{-1}(\omega)\right)=(f'+g')(\omega).$$

引理 5-5 表明 $(f'+g')(\omega)$ 是 F 的一个开集. 所要求的性质得证. □

定理 5-7 设 E,F 是两个 Banach 空间, 而 f 是从 E 到 F 上的同构. 又设 A 是 E 的一个开集, 而从 A 到 F 内的映射 g 是比为 k 的 Lipschitz 映射.

则当 $k<\|f^{-1}\|^{-1}$ 时, $(f+g)$ 是单射的, Lipschitz 映射, 其逆映射也如此, 并且 $f+g$ 变换 A 为 F 的一个开集.

这是引理 5-6 的一个特殊情形; 事实上, 由于 f 是从 E 到 F 上的同构, $f(A)$ 必是 F 的一个开集. 并且 f 把距离至少乘以 $K=\|f^{-1}\|^{-1}$.

$(f+g)$ 显然是 Lipschitz 的, 命题 5-4 表明 $(f+g)$ 把距离至少乘以 $(K-k)$; 故其逆映射是比为 $(K-k)^{-1}$ 的 Lipschitz 映射.

在连续可微函数的研究中, 对于涉及隐函数的定理的证明, 这个定理对于我们是不可或缺的.

推论 5-8　设 E, F 是两个 Banach 空间, 则从 E 到 F 上的同构的集合是 $\mathscr{L}(E,F)$ 的一个开集 (可能是空集).

Z 一个简单的例子表明在断言 5-5,5-6,5-7 中, F 是完备的这个条件是不可或缺的.

设 F 是 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 的由实多项式在 $[0,1]$ 上的限制组成的向量子空间; 而 g 是从 F 到自身内的映射, 它令所有多项式 x, 对应多项式 $t \to x(t^2)$. 我们有 $\|g\| = 1$; 故对于所有 $k, 0 < k < 1$, kg 是比为 k 的 Lipschitz 映射. F 在映射 $x \to x + kg(x)$ 下的像是 F 的异于 F 的向量子空间, 这是因为它仅含有偶数阶的多项式; 从而不包含 F 的任何开集.

§6. 赋范空间的乘积. 连续多重线性映射

设 $(E_i)_{i\in I}$ 是同一个数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间的一个**有限**族, 其中的每一个的范数都用 $\|x\|$ 表示; 而 E 是 E_i 的乘积向量空间.

在 2-14 我们曾经看到 E 上的关联于半范数 $\|x_i\|$ 的族的拓扑等同于 E_i 的拓扑的乘积.

半范数 $\sup\|x_i\|, \sum\|x_i\|$ 和 $(\sum\|x_i\|^2)^{1/2}$ 是等价的, 并且每一个都跟 $\|x_i\|$ 的族在 E 上定义同样的拓扑 (参见 2-16); 这是 E 上的范数, 因为关系 $(\|x_i\| = 0)$ 蕴涵 $x = \mathrm{O}$.

多重线性映射的连续性　我们回忆以下定义: 用 (E_i) 表示向量空间的一个有限族, 而 f 是从乘积 $\prod E_i$ 到另一个向量空间 F 的映射, 如果 f 对于每个变量都是个别地线性的, 则说它是重线性的. 当 E_i 和 F 是赋范空间时, E_i 的乘积也是赋范空间, 可以设法把刻画连续线性映射特征的定理 4-3 推广到多重线性映射:

命题 6-1　设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 和 F 是赋范空间, 而 f 是从 E_i 的乘积 E 到 F 内的多重线性映射; 以下三个断言是等价的:

1° f 是连续的;

2° f 在 E 的所有有界子集上是有界的;

3° 存在常数 $k \geqslant 0$, 使得对于所有 $x = (x_i) \in E$, 有

$$\|f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| \leqslant k\|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \cdots \cdot \|x_n\|.$$

证明　我们在 E 上取范数 $\|x\| = \sup\|x_i\|$.

1° $\Rightarrow$ 2°　设 f 是连续的, f 在 O 的连续性蕴涵存在 E 的中心为 O 的一个球, 使得在此球上 $\|f(x)\| \leqslant 1$; 通过位似变换, 并且利用重要的关系 $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$, 就推导出 f 在中心为 O 的所有球上是有界的, 从而在 E 的所有有界子集上是有界的.

$2° \Rightarrow 3°$ 如果 f 在 E 的所有有界子集上是有界, 那么作为特例, 在球 $\|x\| \leqslant 1$ 上是有界的; 那么令

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\|.$$

对于所有的 $x = (x_i)$, 只要对于每个 $i, x_i \neq O$, 点 $(\|x_i\|^{-1}x_i)$ 属于 E 的单位球, 于是

$$\left\| f\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}, \cdots, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| \leqslant \|f\|,$$

由此得

$$\|f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| \leqslant \|f\| \prod_i \|x_i\|.$$

当 x_i 中有一个是零时, 这个不等式仍然成立, 因为它的两端都是 0.

$3° \Rightarrow 1°$ 为了简化书写, 我们仅对于 $n = 2$ 表述证明.

假定 $\|f(x_1, x_2)\| \leqslant k\|x_1\| \cdot \|x_2\|$.

这个关系显然蕴涵 f 在点 O 的连续性; 为了证明在一个点 (a_1, a_2) 的连续性, 我们令

$$x_1 = a_1 + u_1; \qquad x_2 = a_2 + u_2.$$

则有

$$f((a_1 + u_1), (a_2 + u_2)) - f(a_1, a_2) = f(a_1, u_2) + f(u_1, a_2) + f(u_1, u_2).$$

由此得到, 如果 $\|u_1\| \leqslant \varepsilon, \|u_2\| \leqslant \varepsilon$, 则

$$\|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)\| \leqslant k(\|a_1\|\varepsilon + \|a_2\|\varepsilon + \varepsilon^2).$$

右端随 ε 趋于 0, 遂得所希望的连续性. □

赋范空间 $\mathscr{L}(E_1, E_2, \cdots, E_n; F)$ 6-2 从 E_i 的乘积 E 到 F 内的连续多重线性映射显然构成一个向量空间, 把它记做 $\mathscr{L}(E_1, E_2, \cdots, E_n; F)$.

可以验证

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| \qquad (\text{其中} \|x\| = \sup \|x_i\|)$$

是这个空间的一个范数, 并且 $\|f\|$ 是满足命题 6-1 的不等式的大于或等于零的最小数 k.

类似于命题 4-7 所用的证明表明当 F 是完备空间时, 空间 $\mathscr{L}(E_1, E_2, \cdots, E_n; F)$ 也是完备的.

例 1° 用 E, E' 分别表示一个赋范空间和它的对偶空间.

从 $E \times E'$ 到 $\mathbb{K}$ 内的映射 $(x, l) \to l(x)$ 是 $E \times E'$ 上的双线性型; 不等式 $|l(x)| \leqslant \|l\| \cdot \|x\|$ 表明这个双线性型是连续的, 并且其范数小于等于 1 .

2° 更一般地, 设 E, F 是两个赋范空间; 从 $E \times \mathscr{L}(E, F)$ 到 F 内的映射 $(x, l) \to l(x)$ 是双线性的, 并且其范数小于等于 1.

$\mathscr{L}(E,F;G)$ **和** $\mathscr{L}(E,\mathscr{L}(F,G))$ **的同构**　设 $f:(x,y)\to f(x,y)$ 是 $\mathscr{L}(E,F;G)$ 的一个元素; 对于所有固定的 x, 映射 $f_x: y\to f(x,y)$ 是 $\mathscr{L}(F,G)$ 的一个元素, 并且当 $\|x\|\leqslant 1$ 时, $\|f_x\|\leqslant\|f\|$; 故从 E 到 $\mathscr{L}(F,G)$ 内的映射 $\widehat{f}: x\to f_x$ 显然是线性的, 满足关系 $\|\widehat{f}\|\leqslant\|f\|$.

反之, 设 $g: x\to g_x$ 是 $\mathscr{L}(E,\mathscr{L}(F,G))$ 的一个元素; 从 $E\times F$ 到 G 内的映射 $\hat{g}:(x,y)\to g_x(y)$ 是双线性的, 并且如果 $\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1$, 则有

$$\|g_x\|\leqslant\|g\|,\quad \text{于是}\quad \|g_x(y)\|\leqslant\|g\|,\ \text{随之}\quad \|\hat{g}\|\leqslant\|g\|.$$

而明显地有 $\widehat{\widehat{f}}=f$ 和 $\widehat{\widehat{g}}=g$; 故从 $\mathscr{L}(E,F;G)$ 到 $\mathscr{L}(E,\mathscr{L}(F,G))$ 内的线性映射 $f\to\widehat{f}$ 是双射的, 并且有

$$\|\widehat{f}\|\leqslant\|f\|=\|\widehat{\widehat{f}}\|\leqslant\|\widehat{f}\|,\quad \text{故}\quad \|\widehat{f}\|=\|f\|.$$

从而得到:

命题 6-3　设 E,F,G 是任意三个赋范空间, 则从 $\mathscr{L}(E,F;G)$ 到 $\mathscr{L}(E,\mathscr{L}(F,G))$ 内的线性映射 $f\to\widehat{f}$ (称为**典范映射**) 是一个保持范数的同构.

§7. 有限维赋范空间

我们已经知道 $\mathbb{K}$ 上的一个 n 维赋范空间, 这就是赋以等价范数

$$\sup|x_i|,\left(\sum|x_i|^2\right)^{1/2},\sum|x_i|$$

的 $\mathbb{K}^n$. 我们将看到, 忽略一个同构, 这样的空间是唯一的.

引理 7-1　在 $\mathbb{K}^n$ 上的所有范数 p 是连续的.

证明　设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 的典范基 (a_p 的所有坐标, 除去第 p 个是 1 之外, 都是零). 对于 $\mathbb{K}^n$ 的所有的点 $x=(x_i)$, 我们有

$$p(x)=p\left(\sum x_i a_i\right)\leqslant\sum|x_i|p(a_i),$$

故 p 在点 O 是连续的; 而关系 $|p(a+u)-p(a)|\leqslant p(u)$ 表明 p 在所有的点 a 是连续的. □

命题 7-2　有限维向量空间上的所有范数是等价的.

证明　由于 $\mathbb{K}^n$ 上的 n 维向量空间向量地同构于 $\mathbb{K}^n$, 只需在 $\mathbb{K}^n$ 上进行推理.

设 p_1,p_2 是 $\mathbb{K}^n$ 上的两个范数, 由引理 7-1, 它们在 $\mathbb{K}^n$ 内是连续的, 并且由于在集合 $S=\{x:\sum|x_i|=1\}$ 上不变为零, 故商 $p_1p_2^{-1}$ 和 $p_2p_1^{-1}$ 在 S 上有定义并且是连续的; 而集合 S 在 $\mathbb{K}^n$ 中是有界的和闭的, 故是紧致的; 于是这两个商在 S 上是有界的, 随之由齐次性推理在整个 $\mathbb{K}^n$ 上是有界的. □

推论 7-3 *对于所有 n 维赋范空间 E 和 E 的所有基 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 从 $\mathbb{K}^n$ 到 E 上的向量同构 $(x_i) \to \sum x_i b_i$ 是双连续的.*

这可以更简洁地表述为: 所有 n 维赋范空间皆同构于 $\mathbb{K}^n$.

推论 7-4 *一个赋范空间的所有有限维子空间是完备的, 从而是 E 内的闭集.*

事实上, $\mathbb{K}$ 是完备的, $\mathbb{K}^n$ 也如此, 故根据推论 7-3, 所有有限维赋范空间也是完备的.

推论 7-5 *从有限维的赋范空间的乘积到一个拓扑向量空间 F 的多重线性映射是连续的.*

证明 为了简化记号, 我们局限于 f 是从乘积 $X \times Y$ 到 F 内的双线性映射的情形. 推论 7-3 表明可以取空间 $\mathbb{K}^p$ 和 $\mathbb{K}^q$ 作为 X 和 Y; 如果 (a_i) 和 (b_j) 分别是 $\mathbb{K}^p$ 和 $\mathbb{K}^q$ 的典范基, 则有

$$f(x,y) = f\left(\sum x_i a_i, \sum y_j b_j\right) = \sum x_i y_j f(a_i, b_j).$$

对于所有 i, j, 映射 $(x, y) \to x_i y_j$ 是连续的, 根据拓扑向量空间的公理, 由此推知 f 也如此. □

有限维赋范空间的拓扑刻画 数域 $\mathbb{K}$ 是局部紧致的, 所有空间 $\mathbb{K}^n$ 也如此, 从而所有有限维赋范空间也同样.

我们就要看到这个断言的逆命题也成立, 这对于积分方程的研究至关重要.

定理 7-6 (Frédéric Riesz 定理) *局部紧致的赋范空间是有限维的.*

证明 假定赋范空间 E 是局部紧致的. 于是原点 O 具有一个紧致邻域 V, 而由于中心为 O 且半径非零的闭球组成 O 的邻域基, 其中有一个闭球包含于 V 内, 从而是紧致的. 通过位似变换, 闭单位球 B 因此是紧致的.

于是存在 B 的由开球 $(x_i + \frac{1}{2}\overset{\circ}{B})$ 组成的有限覆盖, 随之存在 B 的由 $(x_i + \frac{1}{2}B)$ 组成的有限覆盖. 用 F 表示由 x_i 生成的向量空间, 而 n 是其维数. 可以写出

$$B \subset \bigcup_i (x_i + \frac{1}{2}B) \subset F + \frac{1}{2}B. \tag{1}$$

我们要证明这个关系仅当 $F = E$ 时才成立. 如果 $F \neq E$, 则存在 E 的包含 F 的 $n+1$ 维的向量子空间 G; 在 G 上, 存在非零的在 F 上为零的线性型 f. 关系 (1) 给出, 在 G 内,

$$B \bigcap G \subset F + \frac{1}{2}(B \bigcap G), \text{ 由此得 } f(B \bigcap G) \subset \frac{1}{2} f(B \bigcap G) \tag{2}$$

而 f 在 G 上是连续的, 又根据 7-4, G 在 E 内是闭的, 从而 $f(B \cap G)$ 是 $\mathbb{K}$ 的紧致子集; 根据 (2), 我们有 $f(B \cap G) \subset \left(\frac{1}{2}\right)^n f(B \cap G)$, 从而这个紧致子集包含于点

O 的所有邻域里, 它必然退缩为这个点. 即 $B \cap G \subset F$. 但是这不可能, 因为 $B \cap G$ 是 O 在 G 内的邻域, 但是 F 却不是.

故必然有 $E = F$ 是有限维的. □

例 赋范空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ 是无穷维的; 故它的闭单位球不是紧致的.

这个断言可以用下列事实直接验证: 任意两个形式如 t^{2^n} 的单项式之间的距离大于等于 $\frac{1}{4}$.

对于紧算子的应用 设 E, F 是两个赋范空间; 说 $\mathscr{L}(E,F)$ 的元素 f 是**紧的**, 如果对于 E 的所有有界子集 X, $f(X)$ 是 F 的相对紧致集.

我们要考虑 f 是一个**算子** (即 $E = F$) 的情形, 并且研究 f 的关联于一个数值 $\lambda \neq 0$ 的特征向量 x 的向量空间, 所谓特征向量即 $f(x) = \lambda x$ 的非零解.

定理 7-7 设 f 是一个紧算子, 则对于所有 $\lambda \neq 0$, 关联于 λ 的特征向量及零向量组成的向量空间 E_λ 是有限维的.

证明 首先注意 f 是连续的, $f(x) - \lambda x = 0$ 的解的集合 E_λ 是闭的.

设 B 是 E 的闭单位球; 集合 $B_\lambda = B \cap E_\lambda$ 也是闭的, 由于 $f(B_\lambda) = \lambda B_\lambda$, $f(B_\lambda)$ 是闭的. 又由于 f 是紧算子, 跟 $f(B)$ 一样, $f(B_\lambda)$ 是相对紧致的; 由于它是闭的, 故它是紧致的.

最后由于 $B_\lambda = \lambda^{-1} f(B_\lambda)$, B_λ 也是紧致的, 从而赋范空间 E_λ 是局部紧致的, 随之是有限维的. □

这里我们不打算建立紧算子理论, 而只给出一个紧算子的例子; 对于其他的例子, 参见习题的 50 到 55 题.

例 7-8 用 E 表示空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$, 用 B 表示它的单位球, 又设 K 是从 $[0,1]^2$ 到 $\mathbb{C}$ 的一个连续映射. 对于所有 $x \in E$, 令

$$f(x)(t) = \int_0^1 K(t,u)x(u)du.$$

由于 K 的连续性, 不等式

$$\left| \int_0 (K(a,u) - K(b,u))\, x(u)du \right| \leqslant \|x\| \int_0^1 |K(a,u) - K(b,u)|du$$

不仅表明 $f(x) \in E$, 还表明当 $x \in B$ 时, $f(x)$ 的族是等度连续的; 由于 $\|f(x)\| \leqslant \|K\|$, 它还是有界的, 根据 Ascoli 定理, 它是紧致的. 换句话说, E 的连续算子 f 是紧的.

III. 可和族. 级数. 无穷乘积. 赋范代数

当谋求定义一个实数的无穷族的和时, 就得利用一个极限概念, 随之要利用 $\mathbb{R}$ 的拓扑.

但是即使确定了这个拓扑, 和仍旧不是唯一的. 曾经使用过的第一个定义, 在很长的期间甚至是唯一的, 都假定相加的实数排列成一个序列 $a_0, a_1, \cdots$; 这个 "级数" 的收敛性由有限和 $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ 这个中间序列定义; 当序列 s_n 收敛到一个数 s 时, 就说级数收敛, 并且其和为 s.

上面的这个定义的选择要求待求和的无穷族赋以了自然次序, 诸如 $(k^n), (n^{-2}), \left((-1)^n n^{-1}\right)$ 这类的族. 当人们开始考虑任意序列 a_n, 或 "多重级数" 时, 仍保持这个旧习, 其中多重级数的指标并没有赋以自然的次序.

但是这个定义几乎没有让加法的代数性质, 诸如交换性和结合性, 发挥任何作用; 当要显现加法的代数性质时, 当着手利用更一般的拓扑向量空间时, 就感到需要一个族 $(a_i)_{i\in I}$ 的可和性定义, 它既在更一般的框架内有效, 又不依赖指标集合 I 的次序.

这里我们正是要研究这样的定义.

§8. 实数可和族

设 $(a_i)_{i\in I}$ 是实数的有限或无穷族; 用 $\mathscr{F}$ 表示 I 的有限子集的集合, 用包含关系为其排序; 对于所有 $J \in \mathscr{F}$, 用 A_J 表示有限和 $\sum\limits_{i\in J} a_i$.

暂时用粗放的词汇, 如果当 J 变得越来越大时, A_J 趋于 A, 则说给定的族是可和的, 并且 A 是它的和.

把这个粗放的想法精确化的一个方式在于, 注意到有序集 $\mathscr{F}$ 是递增滤子的, 形式如 $\{J : J \supset J_0\}$ 的 $\mathscr{F}$ 的子集组成一个滤子基 $\mathscr{B}$. 如果 $A = \lim\limits_{\mathscr{B}} A_J$, 则说族 (a_i) 有和 A.

但是为了避免利用滤子基, 我们将给可和性一个等价的更直接的定义.

定义 8-1 我们说一个实数族 $(a_i)_{i\in I}$ 是**可和的**, 如果存在实数 A, 它具有下列性质:

对于任意数 $\varepsilon > 0$, 存在 $J_0 \in \mathscr{F}$, 使得对所有包含 J_0 的 J 都有

$$|A - A_J| \leqslant \varepsilon.$$

马上指出, 如果一个这样的数 A 存在, 必是唯一的. 事实上, 设 A 和 A' 是两个这样的数; 如果 $J = J_0 \cup J_0'$, 关系

$$\text{对于} J_0 \subset J, |A - A_J| \leqslant \varepsilon; \qquad \text{对于} J_0' \subset J, |A' - A_J| \leqslant \varepsilon$$

同时满足; 由此得

$$|A - A'| \leqslant |A - A_J| + |A' - A_J| \leqslant 2\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 必有 $A = A'$.

于是现在可以补充定义 8-1:

定义 8-1′ 刚证明了唯一性的数 A 称为族 $(a_i)_{i\in I}$ 的和, 把它记做 $\sum\limits_{i\in I} a_i$, 当 I 不致有歧义时, 也可以记做 $\sum\limits_i a_i$, 或 $\sum a_i$.

引理 8-2 设 $(a_i)_{i\in I}$ 和 $(b_i)_{i\in I}$ 是有同一个指标集的实数的可和族, 其和分别为 A 和 B.

则族 $(c_i)_{i\in I}$, 其中 $c_i = a_i + b_i$, 是可和的, 其和是 $A + B$.

证明 任意给定 $\varepsilon > 0$; 有 J_0, $J_0' \in \mathscr{F}$ 与它对应, 使得

$$\text{对于} J_0 \subset J, |A - A_J| \leqslant \varepsilon; \qquad \text{对于} J_0' \subset J, |B - B_J| \leqslant \varepsilon.$$

如果 $J_0 \cup J_0' \subset J$, 这两个不等式同时满足; 由此得

$$|(A + B) - (A_J + B_J)| \leqslant |A - A_J| + |B - B_J| \leqslant 2\varepsilon.$$

令 $C = A + B$, 则写成

$$\text{对于所有 } J, \text{ 只要 } J_0 \cup J_0' \subset J, \text{ 就有} |C - C_J| \leqslant 2\varepsilon,$$

这就证明了族 (c_i) 是可和的, 并且其和为 C. □

命题 8-3 设 I 是一个指标集. 以 I 为指标集的实数的可和族的集合是 $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ 的一个向量子空间, 并且映射 $(a_i) \to \sum a_i$ 是这个空间上的一个线性型.

考虑到引理 8-2, 再注意到如果族 (a_i) 是可和的, 其和为 A, 则族 (λa_i) 是可和的, 并且其和是 λA, 此命题是显而易见的.

由于当对于每个 $i, a_i \geqslant 0$ 时有 $\sum a_i \geqslant 0$, 故当对于每个 $a_i \leqslant b_i$ 时有 $\sum a_i \leqslant \sum b_i$.

注 注意到下列事实, 有时候是有用的. 如果 I' 是 I 的一个这样的子集, 对于所有 $i \notin I', a_i = 0$, 则族 $(a_i)_{i\in I}$ 和族 $(a_i)_{i\in I'}$ 是同时可和的 (或不可和的), 并且有相同的和.

正数族 只有拥有了可和性的方便的判别法, 定义 8-1 才是有用的; 正数族的研究将给我们提供此类判别法.

命题 8-4 正数的族 $(a_i)_{i\in I}$ 是可和的等价于有限和 A_K 是有上界的; 并且

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_K (A_K).$$

证明 1° 假定大于等于 0 的数的族 (a_i) 是可和的; 沿用定义 8-1 的记号, 我们有

$$\text{对于所有包含 } J_0 \text{ 的 } J \text{ 有} |A - A_J| \leqslant \varepsilon, \text{从而} A_J \leqslant A + \varepsilon.$$

由于诸 $a_i \geqslant 0$, 对于所有 $K \in \mathscr{F}$, 有

$$A_K \leqslant A_{K \cup J_0} \leqslant A + \varepsilon.$$

故 A_K 的集合有上界 $A+\varepsilon$(甚至有上界 A, 因为 ε 是任意的).

2° 反之, 假定 A_K 的集合有上界, 而 A 是其上确界. 根据上确界的定义, 对于所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $J_0 \in \mathscr{F}$ 使得

$$A - \varepsilon \leqslant A_{J_0} \leqslant A.$$

对于所有 $J \subset \mathscr{F}$, 只要 $J_0 \subset J$, 就有

$$A - \varepsilon \leqslant A_{J_0} \leqslant A_J \leqslant A, \qquad \text{由此得到 } |A - A_J| \leqslant \varepsilon.$$

这个关系表明族 (a_i) 是可和的, 并且 A 就是它的和. □

例 设 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 是区间 $[0,1]$ 的两两不相交的开子区间的一个族, 而 a_i 是 α_i 的长度. 对于 I 的所有有限子集 K, 显然有 $A_K \leqslant 1$; 故族 $(a_i)_{i\in I}$ 是可和的, 并且其和小于等于 1.

推论 8-5 大于等于 0 的数的可和的族的子族是可和的.

事实上, 设 $I' \subset I$, 其下标 $J \subset I$ 的有限和 A_J 的集合包含对于 I' 的类似集合; 如果第一个集合是有上界的, 则第二个也是如此.

推论 8-6 (比较原理) 设 $(a_i)_{i\in I}$ 和 $(b_i)_{i\in I}$ 是同一个指标集 I 上的非负数的两个族, 对于所有 $i \in I$ 有 $a_i \leqslant b_i$.

如果 $(b_i)_{i\in I}$ 是可和的, 则 $(a_i)_{i\in I}$ 是可和的, 并且它们的和 A 和 B 满足关系 $A \leqslant B$.

证明 设 B 是族 $(b_i)_{i\in I}$ 的和; 对于所有 $J \in \mathscr{F}$, 我们有

$$A_J \leqslant B_J \leqslant B.$$

故命题 8-2 表明族 $(a_i)_{i\in I}$ 是可和的, 并且其和 $A \leqslant B$. □

注意这些结论可以推广到以下情形: 如果存在一个常数 $k \geqslant 0$, 使得对于所有 i, 有 $a_i \leqslant kb_i$; 这时有 $A \leqslant kB$.

例 这个比较原理是一个有力的工具, 从一些基本的可和族出发, 由它可以证明其他的族的可和性.

8-7 最有用的基本族以 $\mathbb{N}$ 或 $\mathbb{N}^*$ 为指标集, 这样的族就是序列; 列举最有用的序列如下:

几何序列 (k^n), 当 $0 \leqslant k < 1$ 时是可和的.

序列 $(n^{-\alpha})$, 当 $\alpha > 1$ 时是可和的.

产生非负可和序列 (a_n) 的有效手段是从 $\mathbb{N}$ 上的一个递减函数 f 出发, 它使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, 令

$$a_n = f(n) - f(n+1).$$

关系 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(1) - f(n+1) \leqslant f(1)$ 表明族 (a_n) 是可和的, 并且其和为 $f(1)$.

作为例子, 依次取 $f(n) = k^n$ 和 $f(n) = n^{-p}$(其中 $p > 0$), 就会重新得到前面指出的序列的可和性.

定义在 $[0, \infty)$ 上的递减函数的积分提供另一个产生可和递减序列的手段; 在研究标题为 "级数和积分的比较" 的积分内容时, 我们将予以考察.

8-8 我们回忆从跟序列 k^n 比较导出的经典的可和性的两个充分条件:

a) 如果 $\limsup(a_{n+1}/a_n) < 1$, 则序列 (a_n) 是可和的; 事实上, 存在一个正数 $k < 1$ 和一个整数 n_0, 使得对于所有 $n \geqslant n_0$ 有 $a_{n+1}/a_n \leqslant k$.

由此推导出 $a_{n_0+p} \leqslant a_{n_0} k^p$, 随之得到所断言的可和性.

如果 $\limsup(a_{n+1}/a_n) \geqslant 1$, 则没有明确的结论, 比如按照 n 是偶数或奇数, 令 $a_n = 2^{-n}$ 或 $a_n = 3^{-n}$, 这个上极限是 $+\infty$, 而序列 (a_n) 却是可和的.

b) 如果 $\limsup(a_n)^{1/n} < 1$, 则序列 (a_n) 是可和的, 因为从一个指标开始, 将有

$$a_n < k^n, \qquad \text{其中} k < 1.$$

如果这个上极限是 1, 我们得不出什么结论 (考虑 $a_n = n^{-\alpha}$ 的情形); 如果这个上极限大于 1, 则 $\limsup a_n = +\infty$, 故序列不是可和的.

8-9 如果数族的指标集为 $\mathbb{N}^2, \mathbb{N}^3$ 或更一般的 $\mathbb{N}^n$, 或 $\mathbb{N}^n$ 的十分简单的子集, 则称之为**二重**, **三重**, n **重级数**, 这样称呼并不确切, 因为在指标集里不存在任何自然的次序.

这里, 积分论仍然使我们能够建立许多 "多重级数" 的可和性.

比如通项为 $(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)^{-\alpha}$ 的 n 重级数 (其中 $p_i \in \mathbb{N}^*$) 当 $\alpha > n$ 时是可和的, 而当 $\alpha \leqslant n$ 时则不然.

通项为 $(a^m + b^n)^{-1}$ 的二重级数 (其中 $a > 1, b > 1$) 是可和的.

命题 8-10 (正数族的极限) 设 $(a_i(\lambda))_{i\in I}$ 是依赖一个参数 $\lambda \in L$ 的正数的可和族, $\mathscr{B}$ 是 L 上的一个滤子基, 使得对于所有 $i \in I$, $a_i(\lambda)$ 有一个沿着 $\mathscr{B}$ 的极限 a_i.

如果存在一个常数 k, 使得对于所有 $\lambda \in L$ 有 $\sum\limits_i a_i(\lambda) \leqslant k$, 则族 (a_i) 是可和的, 并且 $\sum\limits_i a_i \leqslant k$.

证明 对于所有有限的 $J \subset I$, 有

$$\sum_{i \in J} a_i(\lambda) \leqslant k.$$

让 J 固定, 而在这个关系式里沿 $\mathscr{B}$ 过渡到极限, 则得

$$\sum_{i \in J} a_i \leqslant k, \qquad \text{由此得到} \sum_{i \in I} a_i \leqslant k. \qquad \square$$

Z 这里有一个例子表明, 和 $s_\lambda = \sum\limits_i a_i(\lambda)$ 可能不 (沿 $\mathscr{B}$) 收敛到 $s = \sum\limits_i a_i$. 取 $I = L = \mathbb{N}$, 令

$$\text{如果} i \neq n, a_i(n) = 0; \text{ 而 } a_n(n) = 1.$$

则容易验证

$$a_i = \lim_{n \to \infty} a_i(n) = 0,$$

以及

$$s_n = 1, s = 0;$$

故有

$$s \neq \lim_{n \to \infty} s_n.$$

在习题 83 里有一个使得下式成立的充分条件

$$s = \lim_{\mathscr{B}} s_\lambda.$$

对于空间 l_I^p 的应用 设 I 是一个任意的有限或无穷的指标集, 而 p 是一个大于等于 1 的实数.

像在例 3-5 中一样, 可以证明 $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ 的由 $\mathbb{K}$ 的元素的满足关系 $\sum |x_i|^p < \infty$ 的族 $(x_i)_{i \in I}$ 组成的子集是 $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ 的一个向量子空间, 并且 $\|x\| = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$ 是这个子空间上的一个范数.

用 l_I^p 表示这个赋以此范数的 (实或复的) 子空间; 当 $I = \mathbb{N}$ 时, 就重新得到例 3-5 的空间 l^p.

命题 8-11 对于任意的 I, 空间 l_I^p 是完备的.

证明 设 $(x_i(n))$ 是 l_I^p 的 Cauchy 序列; 对于所有 $i \in I$, 关系

$$|x_i(r) - x_i(s)| \leqslant \|x(r) - x(s)\|$$

表明数 $x_i(n)$ 的序列是 $\mathbb{K}$ 的 Cauchy 序列; 用 x_i 表示它的极限.

对于所有 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0, 使得当 $r, s \geqslant n_0$ 时有

$$\sum_{i \in I} |x_i(r) - x_i(s)|^p \leqslant \varepsilon;$$

如果令 s 趋于 $+\infty$, 命题 8-10 表明同样有

$$\sum_{i \in I} |x_i(r) - x_i|^p \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

此式首先表明族 $(x_i(r) - x_i)_{i \in I}$ 是 l_I^p 的一个元素; 由于族 $(x_i(r))$ 也如此, 故族 $x = (x_i)$ 同样如此.

其次关系 (1) 写成对于所有 $r \geqslant n_0$ 有 $\|x(r) - x\| \leqslant \varepsilon$, 这就表示序列 $(x(n))$ 收敛到 x. □

实数族　为了研究一个实数族, 我们把它表示为两个正数族的差.

定义 8-12　我们说一个实数族 (a_i) 是**绝对可和的**, 如果它们的绝对值的族 $(|a_i|)$ 是可和的.

在这个定义里, 副词 "绝对" 并非像日常语言里表示级数是可和的, 并且是毋庸置疑的, 根本没有这个意思. "绝对" 一词只不过简单表示 a_i 的 "绝对值" 出现在定义中.

命题 8-13　设 (a_i) 是一个实数族; 以下三个断言是等价的:

1° 这个族是绝对可和的;

2° 这个族是可和的;

3° 有限和 A_K 的集合是有界的.

证明　1° ⇒ 2°.　$|a_i|$ 的族大于正数族 (a_i^+) 和 a_i^- 的每一个; 故如果 $(|a_i|)$ 是可和的, 则比较原理保证族 (a_i^+) 和 (a_i^-) 也是可和的; 根据命题 8-3, 族 (a_i) 作为它们的差也是可和的.

2° ⇒ 3°.　如果族 (a_i) 是可和的, 则存在 $J_0 \in \mathscr{F}$, 使得

$$\text{对于所有包含 } J_0 \text{ 的 } J, \text{ 有 } |A - A_J| \leqslant 1.$$

对于所有 $K \in \mathscr{F}$, 我们有

$$|A_{K \cup J_0} - A_K| \leqslant \sum_{i \in J_0} |a_i| = \lambda_0.$$

故对于 $J = K \cup J_0$, 比较以上两个不等式得到

$$|A - A_K| \leqslant 1 + \lambda_0.$$

故 A_K 的集合是有界的.

$3° \Rightarrow 1°$ 断言 3° 蕴涵存在两个正数 k_1 和 k_2, 使得对于所有 $K \in \mathscr{F}$ 有 $A_K \in [-k_1, k_2]$.

对于所有 $K \in \mathscr{F}$, 其下标 i 使得 $i \in K$ 并且 $a_i \geqslant 0$ 的 $|a_i|$ 的和属于 $[0, k_2]$, 其下标 i 使得 $i \in K$ 并且 $a_i \leqslant 0$ 的 $|a_i|$ 的和属于 $[0, k_1]$; 故使得 $i \in K$ 的 $|a_i|$ 的和是小于等于 $k_1 + k_2$ 的.

这个和随之是有上界的; 从而 a_i 的族是绝对可和的. □

推论 8-14 *实数的可和族的所有子族是可和的.*

事实上, 如果族 $(a_i)_{i \in I}$ 是可和的, 则族 $(|a_i|_{i \in I})$ 也是可和的, 随之子族 $(|a_i|)_{i \in I'}$ 是可和的, 最终得到子族 $(a_i)_{i \in I'}$ 是可和的.

Z 我们方才确立的可和性和绝对可和性之间的等价性, 在级数理论中没有类似的等价性. 我们回忆以下例子, 一般项为 $(-1)^n n^{-1}$ 的交错级数是收敛的, 但是一般项为 n^{-1} 的级数是发散的.

我们将在后面再回到级数与可和族的比较上来.

§9. 拓扑群和赋范空间上的可和族

前一节的许多结果仅仅立足于 $\mathbb{R}$ 上的群结构和分离拓扑结构之上; 于是人们期待业已概述的理论在所有交换的和分离的拓扑群仍然保持有效. 这里我们尤其着重在赋范空间上, 不过在拓扑群的框架内给出有关定义, 即使仅仅为了可乘族, 也是有价值的.

我们继续使用前一节的记号 $\mathscr{F}, A_J$.

定义 9-1 *设 G 是一个交换的和分离的拓扑群, 以加法称呼其中的群运算; 而 $(a_i)_{i \in I}$ 是 G 的一个元素族.*

*我们说这个族是**可和的**, 如果存在 G 的一个具有下列性质的一个元素 A:*

对于 O 的所有邻域 V, 存在 $J_0 \in \mathscr{F}$, 使得对于所有包含 J_0 的 $J \in \mathscr{F}$, 有

$$A - A_J \in V.$$

*当这样的元素 A 存在时, 它必是唯一的, 称这个元素为该族的**和**, 并且记做*

$$\sum_{i \in I} a_i, \quad \text{或} \quad \sum_i a_i \quad \text{或} \quad \sum a_i.$$

我们证明当 A 存在时确实唯一. 只需稍许修改在定义 8-1 之后给出的证明.

对于 O 的所有邻域 U, 存在 O 的邻域 V, 使得 $V + V \subset U$.

从关系 $A - A_J \in V$ 和 $A' - A_J \in V$ 得到

$$A - A' \in V + V, \qquad \text{于是} \qquad A - A' \in U.$$

元素 $(A - A')$ 属于 O 的所有邻域; 由于 G 是分离的, 必有 $A - A' = 0$, 即 $A = A'$.

注 1° 当 G 的运算以乘号标识时, 我们偏爱称族 (a_i) 是**可乘的**, 而把 A 叫做积, 记做 $A = \prod a_i$.

比如, 对于拓扑群 $\mathbb{R}^*$ 和 $\mathbb{C}^*$ 就是这种情形.

2° 当 I 是有限集时, 族 (a_i) 总是可和的, 并且它的和等于通常的和.

3° 如果 I' 是 I 的子集, 对于所有 $i \notin I'$, $a_i = 0$, 则族 $(a_i)_{i \in I}$ 和 $(a_i)_{i \in I'}$ 同时可和 (或不可和), 并且有相等的和.

命题 9-2 设 $(a_i)_{i \in I}$ 和 $(b_i)_{i \in I}$ 是在同一个指标集 I 上的 G 的元素的两个可和族; 而 A 和 B 分别是它们的和.

则族 $(c_i)_{i \in I}$ (其中 $c_i = a_i + b_i$) 是可和的, 并且其和是 $A + B$.

只需采用引理 8-2 中用过的证明.

命题 9-3 设 G, G' 是两个交换的且分离的拓扑群, 而 φ 是从 G 到 G' 的同胚.

如果 (a_i) 是 G 里的可和族, 和为 A, 则族 (a'_i) (其中 $a'_i = \varphi(a_i)$) 是可和的, 其和为 $A' = \varphi(A)$.

证明 对于 O 的所有在 G' 里的邻域 V', 令 $V = \varphi^{-1}(V')$; 关系

$$\text{当 } J_0 \subset J \text{ 时}, \quad A - A_J \in V$$

蕴涵

$$\varphi(A) - \varphi(A_J) \in \varphi(V), \quad \text{或表示为} \quad A' - A'_J \in V'.$$

换言之, 族 (a'_i) 有和 A'. □

定义 9-4 (Cauchy 准则) 说在 G 里的**族** (a_i) 满足 Cauchy **准则**, 如果对于 O 的所有邻域 V, 存在 $J_0 \in \mathscr{F}$, 使得对于所有与 J_0 不相交的 $K \in \mathscr{F}$, 有 $A_K \in V$.

换句话说, 从族抽取数目 "特别大" 的有限个元素后, 所有有限和是小的.

用 $\mathscr{A}(J_0)$ 表示使得 $J_0 \subset J$ 的 A_J 的集合.

命题 9-5 族 (a_i) 满足 Cauchy 准则, 等价于对于 O 的所有邻域 V, 存在 $J_0 \in \mathscr{F}$ 和一个平移 $a + V$, 使得 $\mathscr{A}(J_0) \subset a + V$.

证明 1° 假定 (a_i) 满足 Cauchy 准则; 所有包含 J_0 的 J 的形式是 $J_0 \cup K$, 其中 K 与 J_0 是不相交的; 于是 $A_J = A_{J_0} + A_K$.

从关系 $A_K \in V$ 推导出

$$A_J \in A_{J_0} + V, \qquad \text{由此得到} \qquad \mathscr{A}(J_0) \subset A_{J_0} + V.$$

2° 给定 V 之后, 存在 O 的对称邻域 U, 使得 $U + U \subset V$.

如果根据假设, 存在 $J_0 \in \mathscr{F}$ 和 $a \in G$, 使得 $\mathscr{A}(J_0) \subset a + U$, 则对于所有跟 J_0 不相交的 K 有:

$$A_{J_0} \in a + U; \quad A_{J_0} + A_K \in a + U, \quad \text{由此得到 } A_K \in U + U \subset V.$$

推论 9-6 *所有可和族满足 Cauchy 准则.*

事实上, 取 a 为可和族的和, 并且利用定义 9-1, 就知道条件 $\mathscr{A}(J_0) \subset a + V$ 是满足的.

Z 这个推论的逆命题一般是不成立的. 但是可以验证在完备赋范空间是正确的.

命题 9-7 *满足 Cauchy 准则的族的子族也满足 Cauchy 准则.*

事实上, 如果两个族的指标集 I 和 I', 这里 $I' \subset I$, 只需在断言 9-4 里取集合 $I' \cap J_0$ 作为子族的 J_0.

命题 9-8 *设 (a_i) 是一个满足 Cauchy 准则的族, 则对于 O 的所有邻域 V, 有*

$$\text{除去有限个指标} i, a_i \in V.$$

为了确信此命题的断言, 只需把 Cauchy 准则用于形式是 $\{i\}$ 的集合 K , 其中 $i \notin J_0$.

推论 9-9 *如果群 G 的 O 有邻域的可数基, 并且族 (a_i) 满足 Caychy 准则, 则使得 $a_i \neq$ O 的指标 i 的集合是有限的或可数的.*

事实上, 设 (V_n) 是 O 的邻域基; 对于所有 n, 使得 $a_i \notin V_n$ 的 i 的集合 I_n 是有限的; 由于使得 $a_i \notin$ O 的 i 的集合恰是 I_n 的并集, 它必然是有限的或可数的.

Z 这个推论似乎让人相信在普通群里可和族的研究, 尤其在赋范空间里, 可以归结为指标集是可数的族的研究, 这样的族就是序列 (a_n).

基于两个理由根本不是这样: 首先, 人为地在指标集内引入次序会掩盖和的交换性和结合性; 其次, 有可能要研究给定不可数指标集 I 上的**所有**可和族.

交换性 9-10 由于在一个族 $(a_i)_{i\in I}$ 的可和性的定义中没有涉及关于 I 的任何序结构, 我们有权粗略地说这个概念是交换性的. 这个断言的精确含义如下: 设 $(a_i)_{i\in I}$ 和 $(b_j)_{j\in I'}$ 是 G 的元素的两个族, 如果存在从 I 到 I' 的一个双射 φ, 使得对

于所有 i 有 $b_{\varphi(i)} = a_i$, 则一个族的可和性蕴涵另一个族的可和性, 并且它们的和是相等的.

结合性 结合性就比较含蓄, 它构成下列命题的内容:

命题 9-11 设 $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是指标集 I 的一个划分, 而 $(a_i)_{i\in I}$ 是以 I 为指标的群 G 的一个元素族.

如果族 $(a_i)_{i\in I}$ 和每个子族 $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ 都是可和的, 并且 A 和 s_λ 分别是它们的和, 则族 $(s_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是可和的, 并且其和是 A.

证明 仍然采用命题 9-5 中的记号 $\mathscr{A}(J_0)$. 对于 L 的所有有限子集 M_0, 采用类似方式, 用 $\mathscr{L}(M_0)$ 表示和 $\sum\limits_{\lambda\in M} s_\lambda$ 的集合, 其中的 M 满足关系 $M_0 \subset M$.

对于给定的 J_0, 如果把使得 $J_0 \cap I_\lambda \neq \varnothing$ 的 λ 的有限集记做 M_0, 那么对于满足 $M_0 \subset M$ 的和 $\sum\limits_{\lambda\in M} s_\lambda$ 是 A_J 的极限, 其中 $J_0 \subset J$; 由此推导出

$$\mathscr{L}(M_0) \subset \overline{\mathscr{A}(J_0)}, \quad 故亦有 \quad \overline{\mathscr{L}(M_0)} \subset \overline{\mathscr{A}(J_0)}.$$

对于 O 的所有邻域 V, 存在一个 J_0, 使得

$$\mathscr{A}(J_0) \subset A + V;$$

于是如果 V 是闭的, 则还有

$$\overline{\mathscr{A}(J_0)} \subset A + V, \quad 故 \quad \overline{\mathscr{L}(J_0)} \subset A + V.$$

由于 O 的闭邻域构成 O 的邻域基 (参见习题的 81 题), 这个关系表明 s_λ 的族是可和的, 并且和为 A. □

例 设 $(a_{p,q})$ 是实数的可和的二重序列; 那么其所有子族是可和的 (推论 8-14), 故有

$$\sum_{p,q} a_{p,q} = \sum_p \left(\sum_q a_{p,\varepsilon}\right) = \sum_q \left(\sum_p a_{p,q}\right).$$

Z 下列断言是错误的: 如果每个子族 $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ 是可和的, 并且族 (s_λ) 是可和的, 则族 $(a_i)_{i\in I}$ 是可和的. 为确信这个事实, 只需取 L 是无穷的, 而每个子族退缩为两个元素, 一个是 1, 另一个是 -1; 每个 s_λ 等于 0, 故族 (s_λ) 是可和的, 但是 a_i 的族并非可和的.

反之, 在两个重要的情形下, 这个断言是正确的:

9-12 ***L* 是有限集** 族 $(a_i)_{i\in I}$ 是如下定义的族 $(a_i^\lambda)_{i\in I}$ 的有限和:

$$如果\ i \in I_\lambda\ 则\ a_i^\lambda = a_i, \qquad 如果\ i \notin I_\lambda,\ 则\ a_i^\lambda = \mathrm{O}.$$

而如果 $(a_i^{\lambda})_{i\in I}$ 和 $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ 中有一个是可和的, 则另一个也是可和的, 并且它们有同样的和. 由命题 9-2 即得欲证的结果.

9-13 a_i 是非负数 从稍许推广和的概念开始: 称元素 a_i 的有限子族的和的有限或无穷上确界是 $\overline{R}_+ = [0, +\infty]$ 的元素的族 $(a_i)_{i\in I}$ 的和.

设 $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ 是 I 的一个划分; 我们将证明对于这里定义的广义的和, 有

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda} s_\lambda \quad \text{其中} \quad S_\lambda = \sum_{i\in I_\lambda} a_i.$$

首先由于显然的比较原理有 $\sum\limits_i a_i$大于等于元素 s_λ 的所有有限和; 于是欲证明的关系中的 "=" 换成 "⩾" 成立; 其次, 带 "⩽" 的关系式由下列事实推导出: 元素 a_λ 的有限和不超过元素 s_λ 的一个有限和.

一个特殊情形是: 如果每个和 s_λ 是有限的, 并且 $\sum\limits_\lambda s_\lambda$ 是有限的, 则 $\sum\limits_i a_i$ 也是有限的, 于是根据命题 8-2, 就有欲证的等式.

例 9-14 设 $(a_i)_{i\in I}$ 和 $(b_j)_{j\in J}$ 是实数的两个可和族; 则 $(|a_i|)$ 和 $(|b_j|)$ 是可和的. 指标集为 $I\times J$ 的族 $|a_ib_j|$ 有一个以 $i\times J$ 为指标集的子族的划分, 根据 9-13 有

$$\sum_{i,j}|a_ib_j| = \sum_i \left(\sum_j |a_ib_j|\right) = \sum_i \left(|a_i|\sum_j |b_j|\right) = \left(\sum_i |a_i|\right)\left(\sum_j |b_j|\right).$$

故族 (a_ib_j) 是绝对可和的, 于是也是可和的; 由命题 9-11 得到

$$\sum_{i,j} a_ib_j = \sum_i(\sum_j a_ib_j) = \sum_i(a_i\sum_j b_j) = (\sum_i a_i)(\sum_j b_j).$$

总之, 称族 (a_ib_j) 是族 (a_i) 与 (b_j) 的**乘积**, 它是可和的, 并且它的和是 (a_i) 与 (b_j) 的和的乘积.

在赋范空间里的可和性 范数的存在让我们重新发现在情形 $\mathbb{R}$ 的部分研究成果.

定理 9-15 *在一个完备赋范空间 E 里, 满足 Cauchy 准则的 E 的元素的所有族是可和的.*

证明 假定族 $(a_i)_{i\in I}$ 是满足 Cauchy 准则的; 对于所有整数 $n>0$, 存在有限的 $J_n\subset I$, 使得 (沿用 9-5 的记号) $\mathscr{A}(J_n)$ 的直径小于 n^{-1}; 对于 $\mathscr{A}(J_n')$ 更是如此, 其中 $J_n' = J_1\cup J_2\cup\cdots\cup J_n$. 进而闭集 $\overline{\mathscr{A}(J_n')}$ 是递减的, 而 E 是完备的, 根据第一章 20-6, 这些闭集有一个公共点 A. 球 $B(A, n^{-1})$ 包含 $\mathscr{A}(J_n')$, 故族 (a_i) 是可和的, 并且其和就是 A. □

推论 9-16 *在一个完备赋范空间里, 一个可和族的所有子族是可和的.*

这是断言 9-6, 9-7, 9-15 的推论.

注　设 F 是一个完备赋范空间 E 的向量子空间, 并且 $\overline{F} = E$, 而 (a_i) 是 F 的一个元素族, 满足 Cauchy 准则, 我们刚才看到它在 E 里是可和的; 但是显然如果它的和不属于 F, 那么它在 F 里就不是可和的. 这个例子显示了满足 Cauchy 准则的族未必可和的理由.

赋范空间里的绝对可和族　判断赋范空间里其一个元素族的可和性并不总是容易的. 了解可和性的充分条件也是有用的; 一个这样的判别法由绝对可和性概念提供:

定义 9-17　*设 E 是一个赋范空间. 说 E 的一个元素族 (a_i) 是***绝对可和的***, 如果它们的范数的族 $\|a_i\|$ 是可和的.*

初看起来, 这个定义依赖 E 的范数; 其实它只依赖 E 的拓扑, 因为如果 p 和 p' 是 E 上的两个等价范数, 则存在两个常数 $k, k' > 0$ 使得 $p' \leqslant kp$ 和 $p \leqslant k'p'$; 于是如果族 $(p(a_i))$ 和 $(p'(a_i))$ 之一是可和的, 则另一个也是可和的.

命题 9-18　*在完备赋范空间里, 所有绝对可和的族是可和的.*

证明　根据定理 9-15, 只需证明如果族 (a_i) 是绝对可和的, 则它必定满足 Cauchy 准则.

而如果 $\|a_i\|$ 的族是可和的, 则它满足 Cauchy 准则; 对于所有 $\varepsilon > 0$, 存在 $J_0 \in \mathscr{F}$, 使得对于所有跟 J_0 不交的 $K \in \mathscr{F}$, 有

$$\sum_{i \in K} \|a_i\| \leqslant \varepsilon.$$

于是

$$\|A_K\| = \|\sum_{i \in K} a_i\| \leqslant \sum_{i \in K} \|a_i\|, \qquad \text{从而} \qquad \|A_K\| \leqslant \varepsilon.$$

于是族 (a_i) 满足 Cauchy 准则. □

Z 必须注意到, 在赋范空间中一个族可以是可和的, 但不是绝对可和的. 这里是两个例子: 1° 设 (f_n) 是 $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ 的元素序列, 其定义是:

$$\text{在 } \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \text{ 上} f_n(t) = t \sin^2 \frac{\pi}{t}; \quad \text{在这个区间外} f_n(t) = 0.$$

则有

$$\|f_n\| \geqslant f_n\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{2n+1};$$

故族 (f_n) 不是绝对可和的; 但它是可和的, 并且其和是如下定义的函数:

$$\text{如果} t \neq 0, f(t) = t \sin^2 \frac{\pi}{t}; \quad f(0) = 0.$$

2° 在赋范向量空间 l^2 里, 设 a_n 是第 n 个坐标为 n^{-1} 而其余坐标为 0 的向量. 由于 $\|a_n\| = n^{-1}$, 族 (a_n) 不是绝对可和的, 但这个序列是可和的, 其和是

$$x = (1, 2^{-1}, \cdots, n^{-1}, \cdots).$$

这两个例子只不过是下列一般断言的特殊情形:

在所有无限维的赋范空间里, 总存在不绝对可和的可和序列 (参见习题 84).

我们将看到在有限维空间里, 情形要简单许多.

命题 9-19 在所有有限维赋范空间里, 可和性和绝对可和性是等价的.

证明 $\mathbb{K}$ 上的所有有限维赋范空间是 $\mathbb{R}$ 上的有限维赋范空间; 此外, 推论 7-3 让我们可以假定这后一个空间就是 $\mathbb{R}^n$, 其范数是

$$\|x\| = \sum |x_p|.$$

由于 $\mathbb{R}^n$ 是完备的, 所有在 $\mathbb{R}^n$ 绝对可和的族 (a_i) 是可和的. 反之, 如果 (a_n) 在 $\mathbb{R}^n$ 里是可和的, 命题 9-3 表明对于所有 $p \leqslant n$, a_i 的第 p 个坐标的族 (a_i^p) 是可和的; 故 $|a_i^p|$ 的族也是可和的; 由于 $\|a_i\| = \sum\limits_p |a_i^p|$, $\|a_i\|$ 的族作为 n 个可和族的和是可和的. □

推论 9-20 对于复数的所有的族, 可和性和绝对可和性是等价的.

多重线性映射和可和族 我们要推广在 9-14 得到的有关实数的两个族的乘积的结果.

命题 9-21 设 E 和 F 是两个赋范空间, 而 f 是从 $E \times F$ 到完备赋范空间 G 的一个连续双线性映射.

设 $(a_i)_{i\in I}$ (对应地, $(b_j)_{j\in J}$) 是 E (对应地, F) 的可和族, 其和为 A (对应地, B).

如果这两个族是绝对可和的, 则 $f(a_i, b_j)$ 的族也是绝对可和的, 并且其和是 $f(A, B)$.

证明 由于 f 是连续的, 存在 (参见命题 6-1) 一个常数 k, 使得

$$\text{对于所有 } x, y \text{ 有 } \|f(x,y)\| \leqslant k\, \|x\| \cdot \|y\|.$$

于是有

$$\|f(a_i, b_j)\| \leqslant k\, \|a_i\| \cdot \|b_j\|;$$

而 $\|a_i\|$ 的族和 $\|b_j\|$ 的族是可和的, 故乘积 $\|a_i\| \cdot \|b_j\|$ 的族也是可和的 (参见 9-14); 随之 $f(a_i, b_j)$ 的族是绝对可和的, 由于 G 是完备的, 故它是可和的.

现在注意到对于所有 $a \in E$ 有 $\sum\limits_j f(a, b_j) = f(a, B)$, 因为映射 $y \to f(a, y)$ 是线性的和连续的 (参见命题 9-3); 对于 $f(a_i, b)$ 有同样的注释.

于是根据和的结合性, 我们有

$$\sum_{i,j} f(a_i, b_j) = \sum_i \left(\sum_j f(a_i, b_j) \right) = \sum_i f(a_i, B) = f(A, B). \qquad \square$$

推论 9-22 设 $(a_i), (b_j)$ 是和分别为 A 和 B 复数的两个可和族, 则乘积 $(a_i b_j)$ 的族是和为 $A \cdot B$ 的可和族.

事实上, 从 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $(x, y) \to xy$ 是双线性的和连续的.

注 1° 命题 9-21 显然可以推广到所有连续多重线性映射.

2° 在命题 9-21 中的断言中, 族 (a_i) 和 (b_j) 的绝对可和性的条件是本质的; 反之, 可以取消其中的 G 是完备的条件, 只需注意: 如果 G 不是完备的, 可以把它嵌入到一个完备赋范空间里 (参见习题的 48 题).

§10. 级数. 级数的比较与可和族的比较

定义 10-1 设 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是交换的和分离的拓扑群 G 的元素的序列, 而 s_n 是部分和 $\sum\limits_{i \leqslant n} a_i$.

称由两个序列 (a_n) 和 (s_n) 组成的二元组为由序列 (a_n) 定义的**级数**.

如果序列 (s_n) 是收敛的, 则说这个级数是**收敛的**; 它的极限 (由于 G 是分离的, 极限是唯一的) s 称为级数的**和**, 并且把它记做 $\sum\limits_0^\infty a_n$, 或简单地记做 $\sum a_n$.

当它不收敛时, 就说它是**发散的**.

注 1° 把由序列 (a_n) 定义的级数用符号 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$ 表示是方便的; 这个记号**按理说**是没有意义的, 但十分有暗示性.

我们更简单地称由序列 (a_n) 定义的级数为 "通项为 a_n 的级数", 或干脆说 "级数 (a_n)".

2° 有时候把指标集 $\mathbb{N}$ 换作 $\mathbb{N}^*$, 或一个赋以了与 $\mathbb{N}$ 的序同构的序的指标序列.

3° 如果 G 上的运算用乘法表示, 就把称谓 "级数" 换作 "无穷乘积", 并且把部分乘积 $p_n = \prod\limits_0^n a_i$ 的极限记做 $\prod\limits_0^\infty a_i$.

4° 当 a_n 是实数时, 我们也谈论级数 (a_n) 在 $\mathbb{R}$ 内的收敛, 如果 $\lim s_n = +\infty$ (或 $-\infty$), 则说和是 $+\infty$ (或 $-\infty$).

我们指出, 对于级数有类似于 9-2 和 9-3 的断言, 这里就不给出其陈述和证明了.

定义 10-2 (Cauchy 准则) 我们说一般项 a_n 在 G 里的**级数**满足 Cauchy **准则**, 如果它的部分和 (s_n) 是 G 的 Cauchy 序列, 换言之, 对于 O 的所有邻域 V, 存

在一个整数 n_0, 使得关系 $n_0 \leqslant p \leqslant q$ 蕴涵

$$s_q - s_p \in V, \quad 或 \quad (a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q) \in V.$$

当 G 是一个赋范空间时, 在定义里把邻域 V 换成一个数 $\varepsilon > 0$, 条件 $s_q - s_p \in V$ 换成 $\|s_q - s_p\| \leqslant \varepsilon$, 会更加方便.

命题 10-3 1° 所有收敛级数满足 Cauchy 准则.
2° 反之, 如果 G 是完备赋范空间, 则所有满足 Cauchy 准则的级数是收敛的.

这是显然的, 因为级数 (a_n) 的收敛归结为序列 (s_n) 的收敛.

命题 10-4 对于所有满足 Cauchy 准则的级数 (a_n) (特别地, 所有收敛级数), 序列 (a_n) 趋于 0.

事实上, 沿用定义 10-2 中的记号, 我们有

$$对于所有 n \geqslant n_0, a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \in V.$$

Z 我们提醒, 这个命题的逆命题即使在 $\mathbb{R}$ 里也是不成立的. 比如, 通项为 $a_n = n^{-1}$ 的级数不满足 Cauchy 准则, 因为对于所有 p, 有 $s_{2p} - s_p \geqslant 2^{-1}$; 不过 $\lim a_n = 0$.

交换性和结合性 首先研究**结合性**, 这比研究交换性来得容易. 如果不改变一个级数 (a_n) 的元素的顺序, 仅仅组合它的项, 那么就把它分成形式如 $(a_{p+1}+a_{p+2}+\cdots+a_q)$ 的片断; 我们可以陈述:

命题 10-5 设 (a_n) 是 G 的一个序列, 而 α_n 是非负整数的一个严格递增序列; 令 $b_n = \sum a_i$, 其中求和指标 i 满足 $\alpha_{n-1} \leqslant i \leqslant \alpha_n$.
如果级数 (a_n) 满足 Cauchy 准则, 则级数 (b_n) 也满足. 如果第一个级数收敛, 则第二个也收敛, 并且它们的和相等.

事实上, 第二个级数的部分和序列是第一个级数部分和序列的子序列.

Z 可能会碰到第二个级数收敛而第一个不收敛的情形: 比如 $a_n = (-1)^n$, 而 $b_n = a_{2n} + a_{2n+1}$.

定义 10-6 我们说一个级数 (a_n) 是交换收敛的, 如果对于 $\mathbb{N}$ 的所有置换 π, 级数 $(a_{\pi(n)})$ 是收敛的.

我们注意这个定义并未**事先**要求级数 (a_n) 和 $(a_{\pi(n)})$ 的和相等.

定理 10-7 一个级数 (a_n) 的交换收敛性等价于它的可和性.
当族 (a_n) 可和时, (a_n) 的和等于每个级数 $(a_{\pi(n)})$ 的和.

证明 1° 假定族 (a_n) 是可和的, 而 A 是它的和. 对于 O 的所有邻域 V, 存在有限的 $J_0 \subset \mathbb{N}$, 使得对于所有包含 J_0 的 J, 有 $A - A_J \in V$.

设 n_0 是 J_0 的最大元素, 对于所有 $p \geqslant n_0$,$\mathbb{N}$ 的区间 $[0,p]$ 包含 J_0, 故 $A - s_p \in V$; 换句话说, 级数 (a_n) 有和 A. 这个推理显然适用于每个级数 $(a_{\pi(n)})$.

2° 反之, 假定族 (a_n) 不是可和的. 那么有两种可能:

a) 族 (a_n) 不满足 Cauchy 准则; 那么存在 O 的一个邻域 V, 使得对于所有有限的 $J \subset \mathbb{N}$, 存在这样的有限的 $K(J) \subset \mathbb{N} \diagdown J$, 其相应的和 $A_{K(J)} \notin V$.

令 $J_0 = \varnothing$; 一般地令 $J_{n+1} = J_n \cup K(J_n)$. 诸集 $K(J_n)$ 是 $\mathbb{N}$ 的有限子集, 两两不交, 并且有

$$A_{K(J_n)} \notin V.$$

容易构造 $\mathbb{N}$ 的一个置换 π, 使得在序列 $(a_{\pi(n)})$ 里, 使得下标 $n \in K(J_p)$ (对于固定的 p) 的元素 a_n 是接连出现的.

令 $b_n = a_{\pi(n)}$; 级数 (b_n) 不满足 Cauchy 准则, 这是因为它包含无穷多个不交的"片断", 每个片断的和都在 V 之外.

于是级数 (a_n) 不是交换收敛的.

b) 族 (a_n) 满足 Cauchy 准则; 我们将证明由 a_n 形成的任何级数都不是收敛的: 比如, 假定级数 (a_n) 是收敛的, 以 A 为它的和. 对于 O 的所有邻域 V, 存在一个有限的 $J_0 \subset \mathbb{N}$, 使得对于所有跟 J_0 不交的有限的 K, 都有 $A_K \in V$; 但是还存在一个整数 n_0, 使得 $A_{K_0} \in A + V$ (其中 $K_0 = \{1, 2, \cdots, n_0\}$).

于是有

$$\text{对于所有有限的} K \subset \mathbb{N}, A_{J_0 \cup K_0 \cup K} \in A + (V + V).$$

由于 $(V + V)$ 是任意小的, 这个关系表明族 (a_n) 是可和的, 其和为 A, 与假设矛盾. □

在赋范空间里的绝对收敛级数

定义 10-8 设 E 是一个赋范空间; 我们说 E 里的一个级数 (a_n) 是**绝对收敛的**, 如果通项为 $\|a_n\|$ 的级数是收敛的.

这个定义把我们引导到正项级数的研究.

定义 10-9 设 (a_n) 是一个正项级数; 下面三个断言是等价的:

1° 级数 (a_n) 是收敛的;

2° 有限和 s_n 的集合是有上界的;

3° 族 (a_n) 是可和的.

证明 1° $\Rightarrow$ 2° 因为序列 (s_n) 是递增的, 如果 $\lim s_n = s$, 则对于所有 n,$s_n \leqslant s$.

2° $\Rightarrow$ 3° 由于和 A_K 不超过某个和 $A_{[0,n]} = s_n$, 如果 $s_n \leqslant k$, 则和 A_K 有上界, 由此得到族 (a_n) 的可和性.

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ 根据定理 10-7, 可和性蕴涵级数的收敛性 (甚至交换收敛性). □

推论 10-10 在一个赋范空间里, 一个级数 (a_n) 是绝对收敛的等价于族 (a_n) 是绝对可和的.

推论 10-11 在一个完备赋范空间里, 所有绝对收敛的级数是交换收敛的.

这最后一个推论从断言 9-18, 10-7 和 10-10 得到.

命题 10-12 (有限维空间情形) 设 (a_n) 是有限维赋范空间的元素的一个序列. 下列断言是等价的:

1° 级数 (a_n) 是交换收敛的;

2° 级数 (a_n) 是绝对收敛的;

3° 族 (a_n) 是可和的;

4° 族 (a_n) 是绝对可和的.

这是断言 9-19, 10-10 和 10-11 的推论.

这个命题特别可以应用于复数的级数.

半收敛级数 10-13 通项为 $(-1)^n n^{-1}$ 的交错调和级数提供了收敛但不交换收敛的级数的例子; 有时候称这样的级数为**半收敛的**. 这个术语相当能够引起联想, 但千万不要滥用; 比如说, 如果级数 (a_n) 是半收敛的, 则级数 $(-a_n)$ 也是半收敛的, 但是它们的和却是交换收敛的, 从而不是半收敛的. 也不存在真正意义上的半收敛判别法; 仅有收敛性的 (充分) 判别法, 它并不关心级数是否交换收敛.

这种类型的最有用判别法由 Abel 的简单不等式提供.

引理 10-14 设 (a_n) 是赋范空间 E 的元素的一个序列; 而 (λ_n) 是正数的一个递减序列; 令

$$k_n = \sup_{p\geqslant 0} \|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\|.$$

则对于所有 n, p 有

$$\|\lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} + \cdots + \lambda_{n+p} a_{n+p}\| \leqslant \lambda_n k_n.$$

证明 令 $b_{n,p} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$; 利用称为 Abel **变换**的一个简单变换 (类似于分部积分), 可以写出

$$\begin{aligned}
&\|\lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} + \cdots + \lambda_{n+p} a_{n+p}\| \\
&\quad = \|\lambda_n b_{n,0} + \lambda_{n+1}(b_{n,1} - b_{n,0}) + \cdots + \lambda_{n+p}(b_{n,p} - b_{n,p-1})\| \\
&\quad = \|(\lambda_n - \lambda_{n+1}) b_{n,0} + \cdots + (\lambda_{n+p-1} - \lambda_{n+p}) b_{n,p-1} + \lambda_{n+p} b_{n,p}\| \\
&\quad \leqslant k_n\left((\lambda_n - \lambda_{n+1}) + \cdots + (\lambda_{n+p-1} - \lambda_{n+p}) + \lambda_{n+p}\right) = \lambda_n k_n.
\end{aligned}$$

□

从这个引理推导出, 如果序列 $(\lambda_n k_n)$ 趋于 0, 则级数 $(\lambda_n a_n)$ 满足 Cauchy 准则; 于是, 利用序列 (λ_n) 递减的事实, 在下面命题所说的两个情形下, $\lambda_n a_n$ 的级数会是收敛的:

命题 10-15 (Abel 法则) *设 (a_n) 是完备赋范空间 E 的元素的一个序列, 而 (λ_n) 是正数的一个递减序列.*

在下列的每个情形下, 级数 $(\lambda_n a_n)$ 是收敛的:

a) 级数 (a_n) 是收敛的;

b) 和 $s_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ 的集合在 E 里是有界的, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

证明 由于 E 是完备的, 根据引理 10-14, 只需验证 $\lambda_n k_n$ 的序列趋于 0.

在情形 a), 级数 (a_n) 的收敛性蕴涵 $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 0$; 而 $\lambda_n \leqslant \lambda_0$, 故 $\lambda_n k_n \leqslant \lambda_0 k_n$, 由此得到结果.

在情形 b), 关系 $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = s_{n+p} - s_{n-1}$ 表明 $b_{n,p}$ 的集合是有界的; 故存在一个数 $k \geqslant 0$, 使得 $k_n \leqslant k$; 于是有 $\lambda_n k_n \leqslant \lambda_n k$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n k_n = 0$. □

例 10-16 如果实数的级数通项的形式是 $\lambda_n a_n$, 其中 $a_n = (-1)^n$, 而 $\lambda_n \geqslant 0$ (或 $\lambda_n \leqslant 0$, 但是改变每项的符号就归结为前者), 则称此级数为**交错级数**.

条件 $\|s_n\| \leqslant k$ 是满足的, 因为 $s_n = 0$ 或 1. 于是如果 λ_n **递减地**趋于 0, 通项为 $(-1)^n \lambda_n$ 的交错级数是收敛的.

10-17 取 a_n 是复数 k^n, 其中 $|k| = 1$, 但 $k \neq 1$. 关系 $s_n = (1 - k^{n+1})/(1 - k)$ 表明

$$|s_n| \leqslant 2\ |1 - k|^{-1}.$$

于是, 沿用前面的记号, 当 λ_n 是极限为 0 的递减正数序列的时候, 级数 $(\lambda_n k^n)$ 收敛.

这时, 实部 (对应地, 虚部) 的级数也收敛; 换言之, 如果令 $k = e^{it}$, 则通项为 $\lambda_n \cos nt$ (对应地, $\lambda a_n \sin nt$) 的级数对于所有 $t \neq 0$ (模 2π) 收敛.

数值级数的研究方法 10-18 核心思想是研究一般项 a_n 的状态; 如果它不趋于 0, 那么级数发散; 如果它趋于 0, 则进一步考察绝对值 $|a_n|$ 的级数是否收敛.

为此, 如果 $|a_n|$ 的表达式复杂, 就力图把 $|a_n|$ 放大为一个一个更便于研究的正项级数的通项; 比如, 如果 $a_n = n^{-2}\cos n$, 则有 $|a_n| \leqslant n^{-2}$, 由此得到绝对收敛性; 如果 $|a_n|$ 有简单且有规律的形成法则, 就尝试利用通过 $|a_{n+1}|/|a_n|$ 或 $|a_n|^{1/n}$ 的 lim sup 表达的判别法 (参见 8-6). 但是强有力的一般的法则在于研究 $|a_n|$ 收敛到 0 的速度.

如果 $|a_n|$ 的级数发散, 可以尝试应用 Abel 法则: 理论上它总是可以应用的 (参见习题的 107 题和 108 题), 不过除去在 10-16 和 10-17 指出的情形之外, 它派上用场的情形是稀少的.

最后, 不要忘记级数 (a_n) 的收敛就是序列 (s_n) 的收敛. 比如, 在函数展开成级数的研究里, 当有了等式

$$f(t) = a_0(t) + a_1(t) + \cdots + a_n(t) + r_n(t),$$

对于给定的 t, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(t) = 0$, 则通项为 $a_n(t)$ 的级数是收敛的, 并且其和是 $f(t)$.

§11. 函数级数与函数可和族

这里我们要研究的级数和可和族, 其元素依赖一个参数, 换句话说, 这是函数的级数和可和族. 我们仅对于可和族明确表述结果; 适当改写就得到关于级数的结果.

定义 11-1 设 X 一个是任意集合; G 是一个交换的和分离的拓扑群, $a_i(x)_{i\in I}$ 是从 X 到 G 内的映射的一个族.

我们说族 $(a_i(x))$ 在 X 上是**一致可和的**, 如果对于所有 $x \in X$, 它是可和的 (其和为 $s(x)$), 并且有限部分和 $s_j = \sum\limits_{i\in J} a_i$ 一致收敛到 s, 即对于 O 的所有邻域 V, 存在一个有限的 $J_0 \subset I$, 使得对于所有包含 J_0 的有限的 J 和所有 $x \in X$, 有

$$s(x) - s_J(x) \in V.$$

对于级数 $(a_n(x))$, 一致收敛性表示序列 $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ 一致收敛到 s.

命题 11-2 设族 $(a_i(x))$ 对于所有 $x \in X$ 是可和的, 则下列断言是等价的:

1° 族在 X 上是一致可和的;

2° (一致 Cauchy 准则.) 对于 O 的所有邻域 V, 存在有限的 $J_0 \subset I$, 使得对于所有与 J_0 不交的有限的 K 和所有 $x \in X$, 有 $s_K(x) \in V$.

证明 1° ⇒ 2°. 设 U 是 O 的一个对称邻域, 使得 $U + U \subset V$. 根据假设, 存在有限的 $J_0 \subset I$, 使得对于所有与 J_0 的不相交的有限的 K 和所有 $x \in X$, 有

$$s(x) - s_{J_0}(x) \in U; \qquad s(x) - s_{J_0\cup K}(x) \in U,$$

由此得到

$$s_K(x) \in U + U \subset V.$$

2° ⇒ 1°. 假设的条件蕴涵对于 O 的所有邻域 V, 存在有限的 $J_0 \subset I$, 使得对于所有包含 J_0 的有限的 J, J', 对于所有 $x \in X$, 有

$$s_{J'}(x) - s_J(x) \in V.$$

设 V 是闭的, 固定 J; 对于所有 $x \in X$, $s(x)$ 是和 $s_{J'}(x)$ 的极限, 故有

$$s(x) - s_J(x) \in V.$$

由于闭的 V 构成 O 的邻域基, 这就证明了族的一致可和性. □

注 当 G 是一个赋范空间时, 更喜欢把条件 $s_K(x) \in V$ 表示成 $\|s_K(x)\| \leqslant \varepsilon$.

推论 11-3 设 (a_i) 是从集合 X 到一个完备赋范空间 E 的映射的一个族. 为了族 $(a_i(x))$ 在 X 上是一致可和的, 必须且只需它满足一致 Cauchy 准则.

证明 如果族是一致可和的, 根据命题 11-2, 它满足一致 cauchy 准则. 反之, 如果这个准则是满足的, 由于 E 是完备的, 对于所有 $x \in X$, 族 $(a_i(x))$ 是可和的 (参见定理 9-15); 于是根据 11-2, 它是一致可和的. □

命题 11-4 设 (a_i) 是从拓扑空间 X 到赋范空间 E 的映射的一个族. 如果每个 a_i 是连续的, 并且族 (a_i) 是一致可和的, 则它的和也是连续的.

事实上, 对于所有 $\varepsilon > 0$, 存在 I 里的有限子集 J_0, 使得对于所有 $x \in X$ 有

$$\|s(x) - s_{J_0}(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

于是 s 是函数 s_{J_0} 的一致极限; 由于 s_{J_0} 是连续的, 故 s 也是如此.

范数收敛 证明函数族的一致可和性并不总是容易的; 人们渴望拥有方便的充分条件. 在有界函数空间 $\mathscr{B}(X, E)$ 里的绝对可和性正是这样的条件.

定义 11-5 设 $(a_i)_{i\in I}$ 是从集合 X 到赋范空间 E 的映射的一个族; 我们说这个族在 X 是**范数可和的**, 如果存在非负数的一个可和族 $(k_i)_{i\in I}$, 使得对于所有 $i \in I$ 和所有 $x \in X$, 有 $\|a_i(x)\| \leqslant k_i$.

这个条件可以更简单地表示为

$$\sum_i \|a_i\| < \infty, \qquad \text{其中} \qquad \|a_i\| = \sup_{x\in X} \|a_i(x)\|.$$

我们注意到在这个定义里, 修饰词 "范数" 就是为了提醒用到了一致收敛 "范数".

命题 11-6 所有从集合 X 到一个完备赋范空间的映射的范数可和的族是一致可和的.

证明 由于 k_i 的族是可和的, 不等式

$$\|\sum_{i\in K} a_i(x)\| \leqslant \sum_{i\in K} k_i$$

表明: 族 (a_i) 满足一致 Cauchy 准则; 根据推论 11-3 即得它的一致可和性. □

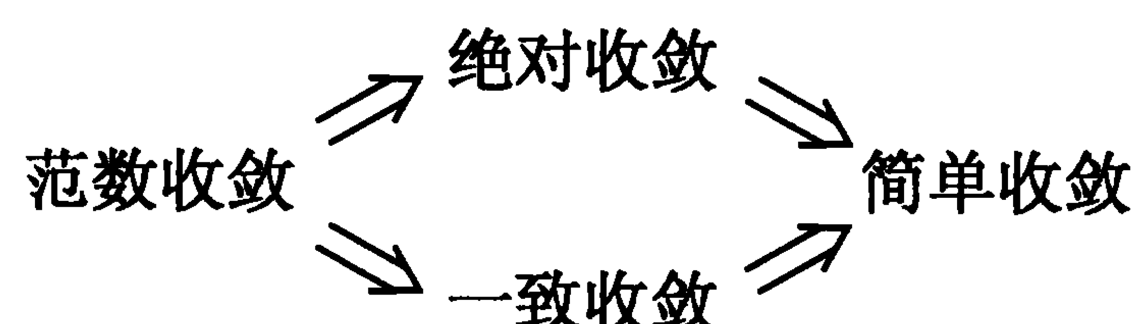
定义 11-5 和命题 11-6 容易改写得适用于级数情形.

各种收敛模式的比较 11-7 对于所有从 X 到一个赋范空间 E 的映射的族 (a_i), 我们定义了简单、一致、绝对和范数等可和性. 对于级数的收敛性有同样的区别.

可和性或收敛性的不同模式之间的关系, 初学者往往混淆不清; 故此对这些关系我们再多说几句.

这里仅考察级数情形; 为了避免在 E 不完备时产生的其他层次的困难, 我们假定 E **是完备的**.

上面建立的命题提供下列示意图:



显然可以得到 (范数收敛) ⇒ (简单收敛), 但是我们将借助几个例子确信除去写明的五个蕴涵外, 再没有其他的蕴涵. , 即使涉及的是 $[0,1]$ 上的连续数值函数:

11-8 (对于所有 x) 的绝对收敛不蕴涵一致收敛.

事实上, 对于所有 $x \in [0,1]$, 令

$$a_n(x) = (x^n - x^{n+1});$$

级数 $(a_n(x))$ 是正的, 并且对于所有 x 收敛, 故绝对收敛.

但是

$$\text{如果 } x \neq 1 \text{ 则 } s(x) = 1, \text{ 如果 } x = 1, \text{ 则 } s(x) = 0.$$

由于 $s_n(x)$ 是连续的, 如果收敛是一致的, 其和 s 应该是连续的; 由于 s 不是连续的, 故收敛不是一致的.

11-9 反之, 一致收敛不蕴涵绝对收敛.

事实上, 令

$$\text{对于所有 } x \in [0,1] \text{ 和所有 } n \geqslant 1, a_n(x) = (-1)^n n^{-1}.$$

级数 $(a_n(x))$ 一致收敛, 但是对于任何 x, 它都不绝对收敛.

11-10 最后指出, 一致收敛和绝对收敛合起来也不蕴涵范数收敛: 只需取在命题 9-18 之后的例 1 中所用的级数 (f_n).

应用 11-11 设 α, β 是两个非零复数, 它们的商不是实数; 用 P 表示 $\mathbb{C}$ 的形式如

$$w_{p,q} = p\alpha + q\beta, \quad \text{其中 } p \text{ 和 } q \in \mathbb{Z};$$

的复数组成的子集, 这是 $\mathbb{C}$ 的一个加法子群, 它的每个点都是孤立点.

用 $a_{p,q}$ 表示由

$$a_{0,0}(z) = z^{-2}; \quad \text{如果 } (p,q) \neq (0,0), a_{p,q}(z) = (z - w_{p,q})^{-2} - w_{p,q}^{-2}.$$

在 $\mathbb{C}\setminus P$ 定义的函数.

我们将指出: 对于 $\mathbb{C}$ 的所有紧致子集 K, 从族 $(a_{p,q})$ 抽取掉一个适当的有限子族后得到的族在 K 上是一致可和的.

事实上, 取定 $\rho>0$; 从族 $(a_{p,q})$ 取消使得 $|w_{p,q}|\leqslant 2\rho$ 的项.

设 $|w|>2\rho$, 而 $|z|\leqslant\rho$, 我们有

$$\left|\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right|=\left|\frac{z(2w-z)}{w^2(z-w)^2}\right|\leqslant|\rho|\frac{3|w|}{|w|^2|\frac{1}{2}w|^2}=\frac{12\rho}{|w|^3}.$$

而 $|w_{p,q}|^{-3}$ (其中 $(p,q)\neq(0,0)$) 的族是可和的; 事实上, 我们注意 $|w_{p,q}|\geqslant k(|p|+|q|)$, 其中 k 是一个正数 (利用事实: $|x\alpha+y\beta|$ 和 $(|x|+|y|)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的范数). 于是

$$\sum|w_{p,q}|^{-3}\leqslant\sum k^{-3}(|p|+|q|)^{-3}\leqslant 4k^{-3}\sum_{\substack{p,q\geqslant 0\\(p,q)\neq(0,0)}}(p+q)^{-3}.$$

由于 $(p+q)^{-3}$ (其中 $p,q\in\mathbb{N},(p,q)\neq(0,0)$) 的族是可和的 (参见 8-7), 故 $|w_{p,q}|^{-3}$ 的族也是可和的.

于是在去掉有限数目的项之后, $a_{p,q}$ 的族在圆盘 $|z|<\rho$ 上是范数收敛的; 由于所考虑的 $a_{p,q}$ 在这个圆盘上是连续的 (甚至是全纯的), 它们的和在这个圆盘上是连续的 (甚至是全纯的).

于是所有 $a_{p,q}$ 的和 f 在 $(\mathbb{C}\setminus P)$ 是全纯的, 更准确地说, 它在 $\mathbb{C}$ 是亚纯的[①], P 是极点的集合, f 在极点 $w_{p,q}$ 的奇异部分是 $(z-w_{p,q})^{-2}$.

这个函数 f 在双周期半纯函数的研究中扮演重要角色.

§12. 复数可乘族与复数无穷乘积

可和族和级数在 9, 10 两节已经在交换的和分离的拓扑群里定义; 并且我们曾经指出当群运算记做乘法时, 就改称这个族是可乘族和无穷乘积.

当群 G 是非零复数的赋以由 $\mathbb{C}$ 诱导的拓扑的乘法群 $\mathbb{C}^*$ 时就是这种特殊情形.

由于在一般群里发展的理论能够应用到 $\mathbb{C}^*$, 一般的结论可以直接在 $\mathbb{C}^*$ 里表述. 但是, 复数的可乘族在全纯函数理论里的起关键作用的应用引导我们稍许修改可乘族和无穷乘积的定义, 以便不再排除 0 作为无穷乘积的值. 这个推广由于 $\mathbb{C}$ 是完备距离空间这一事实也将简化理论的陈述.

设 $(a_i)_{i\in I}$ 是 $\mathbb{C}$ 的元素的一个族; 继续沿用定义 8-1 中采用的记号 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{B}$, 对于所有 $J\in\mathscr{F}$, 我们把有限乘积 $\prod\limits_{i\in J}a_i$ 表示为 p_J.

定义 12-1 我们说 $\mathbb{C}$ 的元素的一个族 $(a_i)_{i\in I}$ 是**在 $\mathbb{C}$ 可乘的**, 并且 p 是乘积, 如果对于所有 $\varepsilon>0$, 存在 $J_0\in\mathscr{F}$, 使得对于所有包含 J_0 的 $J\in\mathscr{F}$, 有 $|p-p_J|\leqslant\varepsilon$.

① f 是亚纯的, 如果在 $\mathbb{C}$ 的所有点, 它等于两个全纯函数的商.

乘积 p 记做 $\prod_{i \in I} a_i$, 或 $\prod_i a_i$, 或 $\prod a_i$.
如果 $p \neq 0$, 则说这个族在 $\mathbb{C}^*$ 是可乘的.

换言之, 说族 (a_i) 是可乘的, 并且乘积为 p, 如果 p_J 沿滤子基 $\mathscr{B}$ 收敛到 p.
p 的唯一性由 $\mathbb{C}$ 的拓扑的分离性得到.

我们注意如果 $p \neq 0$, 则对于所有 i, 有 $a_i \neq 0$. 定义 12-1 就跟在拓扑群 $\mathbb{C}^*$ 里的可乘性的定义一致 (故在 12-1 里用的术语是合适的).

用类似的方式, 通过部分乘积 $p_n = \prod_{k \leqslant n} a_k$ 的序列收敛到 p 定义通项为 a_n (其中 $n \in \mathbb{N}$ 或 $\mathbb{N}^*$) 的无穷乘积的收敛性.

$(1+u_i)$ 的可乘性和 u_i 的可和性之间的关系 对于 $\mathbb{C}^*$ 里的所有可乘族 (a_i), 除有限个 a_i 之外, 诸 a_i 都跟 1 接近到 ε, 这个事实引导至令 $a_i = (1+u_i)$.

这个形式不仅有暗示性, 而且引导到下列定理, 它成为可乘性和可和性之间的一个桥梁.

定理 12-2 设 $\mathbb{C}$ 的元素的一个族 $(1+u_i)_{i \in I}$ 使得对于所有 $i \in I$, $1 + u_i \neq 0$. 则族 (u_i) 的可和性等价于族 $(1+u_i)$ 在 $\mathbb{C}^*$ 里的可乘性.

证明 对于 $z \in \mathbb{C}$, 令

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \sum_0^\infty z^n/n!.$$

全纯函数的初等理论建立了我们要援引的下列性质 (参见习题中的第 144 题):

a) 函数 f (称为 "指数函数") 是从加法群 $\mathbb{C}$ 到乘法群 $\mathbb{C}^*$ 的一个连续表示.

b) 如果令 $V = \{z : |z| \leqslant \frac{1}{2}\}$, 集合 $W = f(V)$ 是 1 的一个闭邻域, 并且 f 在 V 上的限制是从 V 到 $f(V)$ 的一个全纯表示.

我们还会用到下列关系, 其验证是初等的:

$$\text{对于所有}\alpha \in V, \quad \frac{1}{2}|\alpha| \leqslant |f(\alpha) - 1| \leqslant 2|\alpha|.$$

借助推论 9-20, 利用这个关系可以证明下列性质:

c) 对于 V 的元素的所有的族 (α_i), 存在 α_i 的可和性和 $(f(\alpha_i) - 1)$ 的可和性之间的等价性.

1° 假定所有 $(1+u_i)$ 属于 W, 并且用 α_i 表示 V 的使得 $f(\alpha_i) = 1 + u_i$ 的元素; 性质 c) 表明: 如果 u_i 的族是可和的, 则 α_i 的族也可和. 而由于 f 是一个从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}^*$ 内的一个连续表示, 命题 9-3 表明 $f(\alpha_i) = 1 + u_i$ 的族是可乘的, 并且它的乘积不等于 0.

当 u_i 组成任意可和族时, 所有 u_i, 除去它们中的有限个外, 属于 0 的邻域 $(-1 + W)$. 于是根据刚才所确立的断言, 对应的 $1 + u_i$ 的族是可乘的, 并且它们的乘积不等于 0. 于是原来的族是可乘的, 并且如果所有 $(1+u_i) \neq 0$, 则其乘积不等于 0.

2° 反之, 如果 $(1+u_i)_{i\in I}$ 是在 $\mathbb{C}^*$ 内的可乘族, 使得所有有限乘积 p_J 属于 W; 而 p 是它的乘积, 由于 W 是闭的, 故有 $p\in W$.

设 α_i 是 V 的满足 $f(\alpha_i)=1+u_i$ 的点; 而 s 是 V 的满足 $f(s)=p$ 的点; 对于所有 $J\in\mathscr{F}$, 令 $s_J=\sum\limits_{i\in J}\alpha_i$.

性质 a) 表明 $f(s_J)=p_J$, 于是根据性质 b), p_J 收敛到 p 蕴涵 s_J 收敛到 s; 于是 α_i 的族是可和的, 并且其和是 s. 性质 c) 则最后表明 $u_i=(f(\alpha_i)-1)$ 的族是可和的.

现在假定 $(1+u_i)$ 组成在 $\mathbb{C}^*$ 里的任意一个可乘族. 它必然满足 Cauchy 准则 (参见推论 9-6); 于是在去掉有限数目的项以后, 留下的族的所有部分乘积在 W 内; 根据 1° 开头的断言, 这个族的 u_i 是可和的, 由此得到原来的族的可和性. □

注 12-3 这个证明原则上特别简单, 不足之处在于要用到全纯函数的理论. 知道定理的最有用部分的一个初等证明是饶有兴味的:

假定族 (u_i) 是可和的, 于是它是绝对可和的, 令

$$\sum_{i\in I}|u_i|=k.$$

对于所有有限的 $J,K\subset I$, 我们有

$$|p_J|\leqslant\prod_{i\in J}(1+|u_i|)\leqslant e^{\sum\limits_{i\in J}|u_i|}\leqslant e^k, \tag{1}$$

$$|p_K-1|\leqslant\left(\prod_{i\in K}(1+|u_i|)-1\right)\leqslant\left(e^{\sum\limits_{i\in J}|u_i|}-1\right)\leqslant e^k\sum_{i\in K}|u_i|.^{①} \tag{2}$$

对于所有 $\varepsilon>0$, 存在有限的 $J_0\subset I$, 使得对于所有有限的与 J_0 不交的 K, 有

$$\sum_{i\in K}|u_i|\leqslant\varepsilon.$$

从而利用 (1) 和 (2), 我们还有

$$|p_{J_0\cup K}-p_{J_0}|=|p_{J_0}|\cdot|p_K-1|\leqslant\varepsilon e^{2k}. \tag{3}$$

于是从 $\mathscr{F}$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $J\to p_J$ 满足 Cauchy 条件 (见第一章定义 20-7), 故它在 $\mathbb{C}$ 里沿有序集 $\mathscr{F}$ 收敛; 换句话说, 族 $(1+u_i)$ 在 $\mathbb{C}$ 内是可乘的.

现在设对于所有的 i, $(1+u_i)\neq 0$, 则对于所有有限的 J_0, 有 $p_{J_0}\neq 0$, 另一方面, 如果对于所有 i, 有 $|u_i|<\frac{1}{2}$ (可以这样假设), 则对于所有有限的 K, 有

$$|p_K|\geqslant\prod_{i\in K}(1-|u_i|)\geqslant\left(\prod_{i\in K}(1+2|u_i|)\right)^{-1}\geqslant e^{-2k}.$$

①利用初等不等式, 对于所有 $\alpha\geqslant 0, e^\alpha-1=e^\alpha(1-e^{-\alpha})\leqslant\alpha e^\alpha$.

由此得到 $p \neq 0$.

无穷乘积 所有前面对于任意交换群所叙述的内容都显然可以应用到乘法群 $\mathbb{C}^*$; 比如定理 10-7 就让我们可以陈述为:

命题 12-4 *通项为 $(1+u_n)$ 的无穷乘积在 $\mathbb{C}^*$ 内交换收敛等价于 $(1+u_n)$ 的族在 $\mathbb{C}^*$ 内是可乘的.*

于是每个无穷乘积等于族 $(1+u_n)$ 的乘积.

当一个无穷乘积具有这个性质时, 有时就说它是**绝对收敛的** (暗示族 $(|u_i|)$ 的可和性).

半收敛的无穷乘积 像对于半收敛级数一样, 我们说通项为 $(1+u_n)$ 的**无穷乘积是半收敛的**, 如果它是收敛的, 但不是交换收敛的.

通过与定理 12-2 的类比, 或许会认为在 $(1+u_n)$ 的无穷乘积的半收敛性和级数 (u_n) 的半收敛性之间有等价性; 我们将看到当 u_n 是实数时, 差不多是这样, 但是当它们是复数时, 却并非如此.

命题 12-5 *设 (u_n) 是极限为 0 的***实数***序列, 并且对于所有的 $n, 1+u_n \neq 0$.*

1° 如果级数 (u_n) 是收敛的, 则 $(1+u_n)$ 的乘积收敛到一个数 $p \in \mathbb{R}$; 如果 $\sum u_i^2 < \infty$, 则 $p \neq 0$; 如果 $\sum u_i^2 = \infty$, 则 $p = 0$.

2° 反之, 如果 $(1+u_n)$ 的乘积收敛到一个数 $p \neq 0$, 则当 $\sum u_i^2 < \infty$ 时, 级数 (u_n) 收敛, 当 $\sum u_i^2 = \infty$ 时, 级数的和为 $+\infty$.

证明 在去掉有限项之后, 可以假定对于所有的 n 有 $|u_n| < 1$. 这样就引导我们利用从乘法群 $\mathbb{R}_+^*$ 到加法群 $\mathbb{R}$ 上的同构 $x \to \operatorname{Log} x$: 如果令 $\alpha_n = \operatorname{Log}(1+u_n)$, $(1+u_n)$ 的乘积收敛到 p 等价于 α_n 的级数收敛到 $\operatorname{Log} p$.

我们有

$$\alpha_n = \operatorname{Log}(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2}(1+\varepsilon_n), \quad \text{其中} \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

由于级数 (u_n^2) 是正的, 这个关系表明当 $\sum u_n^2 < \infty$ 时, 级数 $(u_n), (\alpha_n)$ 之一的收敛性蕴涵另一个的收敛性.

当 (u_n) 收敛, 并且 $\sum u_n^2 = \infty$ 时, 我们有 $\sum \alpha_n = -\infty$, 故 $p = 0$.

反之, 当 (α_n) 收敛, 并且 $\sum u_n^2 = \infty$ 时, 我们有 $\sum u_n = +\infty$. □

注 当 $p = 0$ 时, 这等价于 $\sum \alpha_n = -\infty$, 状况会更复杂; 级数 (u_n) 可能收敛, 或发散到 $+\infty$ 抑或 $-\infty$, 或发散但既不发散到 $+\infty$, 也不发散到 $-\infty$.

一般情形 12-6 前面的证明彰显了对数函数的功用; 当 u_n 是复数时, 我们再次起用它.

设 $(1+u_n)$ 是无穷乘积的通项, 使得 $\lim u_n = 0$. 沿用定理 12-2 的证明中采用的记号, 对于所有充分大的 n, 我们有 $(1+u_n) \in W$, 于是 $(1+u_n)$ 有形式 $\exp \alpha_n$, 其中 $\alpha_n \in V$; 如果用 Log 表示 f 在 W 内的反函数 f^{-1}, 则有

$$\alpha_n = \mathrm{Log}(1+u_n).$$

我们可以陈述: $(1+u_n)$ 的无穷乘积在 $\mathbb{C}^*$ 里的收敛性等价于 $\alpha_n = \mathrm{Log}(1+u_n)$ 的级数的收敛性.

全纯函数的初等理论指出

$$\text{对于}1+u \in W,\ \text{有}\ \alpha = \mathrm{Log}(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}u^n}{n} + \cdots.$$

在实际应用中, 正是这个关于 u 的幂级数让我们得到一个无穷乘积收敛与否的结论.

例 1 如果 $|u_n^2|$ 的级数收敛, 关系

$$\alpha = \mathrm{Log}(1+u) = u - \frac{u^2}{2}(1+\varepsilon(u)), \quad \text{其中} \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0.$$

表明级数 (u_n) 和 (α_n) 同时收敛或发散.

例 2 反之, 这里有一个例子说明: 如果级数 (u_n^2) 不是绝对收敛的, 有可能级数 (u_n) 收敛而 $(1+u_n)$ 的乘积在不论在 $\mathbb{C}$ 里, 还是在添加一个无穷远点的 $\mathbb{C}$ 里, 都不收敛.

按照 $\mathrm{Log}\, n$ 的整数部分是偶数, 或是奇数, 令 $u_n = (-1)^n n^{-\frac{1}{2}}$, 或 $i(-1)^n n^{-\frac{1}{2}}$.

可以验证: 级数 (u_n) 是收敛的, 级数 (u_n^3) 是绝对收敛的; 而级数 (u_n^2) 是发散的, 并且它的部分和 s_n 的序列拥有一个 (不退缩为 $\mathbb{R}$ 的一个点的) 闭区间的所有点作为附着值. 于是从关系

$$\alpha = \mathrm{Log}(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}(1+\varepsilon(u)), \qquad \text{其中} \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0,$$

得到部分乘积 $\prod\limits_{1}^{n}(1+u_p)$ 的序列拥有一个有界区间的诸点作为附着值, 该区间位于通过 0 的一条直线上.

函数的乘积和可乘族 在一个群 G 里取值的函数一致可和性的定义 11-1 及其推论可以直接应用到 G 是群 $\mathbb{C}^*$ 的情形.

我们现在要研究一致可乘性的一个充分条件, 并打算以这样的方式来表述, 使它涵盖对于在 $\mathbb{C}$ 里取值的映射, 而不仅仅是在 $\mathbb{C}^*$ 里取值的映射.

定义 12-7 设 X 是任意集合, 而 $(u_i)_{i\in I}$ 是从 X 到 $\mathbb{C}$ 内的映射的一个族.

我们说族 $(1+u_n)$ 是**范数可乘的**, 如果所有函数 u_i 是有界的, 并且 u_i 的族是范数可和的 (即 $\|u_i\|$ 的族是可和的, 这里 $\|u_i\| = \sup\limits_x |u_i(x)|$).

命题 12-8 设 $(1+u_i)_{i\in I}$ 是从集合 X 到 $\mathbb{C}$ 内的范数可乘映射的一个族. 则

1° 对于所有 $x\in X$, 族 $(1+u_i(x))$ 在 $\mathbb{C}$ 内是可乘的, 并且仅当有一个 $(1+u_i(x))$ 是零时该族的乘积 $p(x)$ 才是零.

2° 乘积 p 在 X 上是有限乘积 p_J 的 (沿关联于 I 的滤子基 $\mathscr{B}$ 的) 一致极限.

证明 1° 第一个断言直接从定理 12-2 得到.

2° 根据假设, $\|u_i\|$ 的族是可和的 (设它的和是 k); 于是对于所有 $\varepsilon>0$, 存在有限的 $J_0\subset I$, 使得对于所有有限的与 J_0 不相交的 K 有

$$\sum_{i\in K}|u_i(x)|\leqslant\sum_{i\in K}\|u_i\|\leqslant\varepsilon.$$

于是 12-3 中的不等式 (b) 和 (c) 给出

$$|p_{J_0\cup K}(x)-p_{J_0}(x)|=|p_{J_0}(x)|\cdot|p_K(x)-1|\leqslant\varepsilon e^{2k},$$

由此过渡到极限, 得到

$$|p_{J_0\cup K}(x)-p(x)|\leqslant|p_{J_0\cup K}(x)-p_{J_0}(x)|+|p(x)-p_{J_0}(x)|\leqslant 2\varepsilon e^{2k}.$$

故 p_J 沿 $\mathscr{B}$ 一致收敛到 p. □

推论 12-9 设 $(1+u_i)_{i\in I}$ 是从拓扑空间 X 到 $\mathbb{C}$ 内的连续映射的范数可乘映射的一个族, 则这个族的乘积 p 是有界的和连续的, 并且它的零点的集合是它的因子的零点集的并集.

例 10 设 a_n 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 内的映射, 其定义是

$$a_0(z)=z;\quad \text{对于所有}n>0,\ a_n(z)=1-z^2/n^2.$$

在每个圆盘 $\{z:|z|<\rho\}$ 上, 我们有 $|n^{-2}z^2|\leqslant n^{-2}\rho^2$, 故 a_n 的族在每个这样的圆盘上是范数可乘的. 它的乘积 p 在这样的圆盘上是函数 a_n 的有限乘积的一致极限, 这些乘积是 z 的多项式; 从而 p 是 $\mathbb{C}$ 内的全纯函数; 它的零点集是 $\mathbb{Z}$, 并且每个零点是简单零点.

§13. 赋范代数

我们回顾一下, 称所有赋以了一个外部运算的环 A 为域 $\mathbb{K}$ 上的**代数**, 此外部运算令所有 $(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times A$, 对应 A 的一个元素 λx, 使得

1° A 赋以了加法和这个外部运算之后是 $\mathbb{K}$ 上的一个向量空间.

2° $\lambda(xy)=(\lambda x)y=x(\lambda y)$.

如果在 A 里的乘法是交换的, 则说代数 A 是交换的.

现在我们研究 $\mathbb{K}$ 上的代数, 此代数赋以了与 A 的乘法相容的一个范数, 其意义在下列定义中将明确界定.

定义 13-1 称 (在看作向量空间的 A 上) 赋以一个范数的 $\mathbb{K}$ 上的代数为**赋范代数**, 如果该范数满足

$$\text{对于所有}x, y \in A, \quad \|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

我们说这个赋范代数是**完备的** (或 Banach 的), 如果赋范向量空间 A 是完备的.

赋范代数的例子 13-2 $\mathbb{C}$ 赋以范数 $\|x\| = |x|$ 之后是 $\mathbb{C}$ 上的和 $\mathbb{R}$ 上的 Banach 代数.

13-3 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方矩阵 (x_{ij}) 的代数 $\mathscr{M}^{(n)}$ 是一个赋范代数, 其范数是 $\|M\| = \sum\limits_{i,j}|x_{ij}|$, 其中 x_{ij} 表示 M 的一般元素.

容易验证此范数与乘法的相容性. 因为向量空间 $\mathscr{M}^{(n)}$ 是有限维 (等于 n^2) 的, 故这个代数是完备的.

13-4 设 E 是一个赋范向量空间; E 的**自同构** (即从 E 到 E 的连续线性映射) 向量空间 $\mathscr{L}(E)$ 将成为一个代数, 如果给它赋以由 $f \circ g(x) = f(g(x))$ 定义的乘法 $f \circ g$.

我们业已赋以的范数 (命题 4-6) 满足关系

$$\|f \circ g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.$$

于是赋以这个范数的 $\mathscr{L}(E)$ 是一个赋范代数. 当 E 是完备空间时, 这个代数也是完备的 (参见命题 4-7).

13-5 从一个集合 X 到 $\mathbb{C}$ 内的有界映射的向量空间 $\mathscr{B}(X, \mathbb{C})$ 是一个代数, 其通常乘法的定义是

$$fg(x) = f(x) \cdot g(x).$$

在这个空间上的一致收敛范数满足条件 $\|fg\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$.

这个代数是完备的.

13-6 当 X 是一个拓扑空间时, $\mathscr{B}(X, \mathbb{C})$ 的由连续函数组成的子集是 $\mathscr{B}(X, \mathbb{C})$ 的一个子代数; 它在 $\mathscr{B}(X, \mathbb{C})$ 里是闭的, 故也是完备的.

对于 X 的所有子集 Y, 可以关联 $\mathscr{B}(X, \mathbb{C})$ 的由在 Y 上取零值的连续函数组成的子集; 这是 $\mathscr{B}(X, \mathbb{C})$ 的完备子代数.

13-7 有紧支集的连续数值函数的向量空间 $\mathscr{D}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是赋以了一个由普通乘积 (由 $fg(x) = f(x) \cdot g(x)$ 定义) 定义的代数结构. 不过, 还可以通过一个如下定义的

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$$

卷积 $f * g$, 赋以一个重要的代数结构.

可以验证 $f*g$ 必然属于 $\mathscr{D}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 卷积是结合的和交换的, 并且映射 $(f,g)\to f*g$ 是双线性的.

如果令

$$\|f\|=\int_{\mathbb{R}}|f(t)|dt,$$

则向量空间 $\mathscr{D}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 变成一个不完备的赋范空间, 可以验证它的范数同卷积是相容的, 即有 $\|f*g\|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$:

$$\|f*g\|\leqslant\int_{\mathbb{R}^2}|f(x-t)g(t)|dtdx=\int_{\mathbb{R}^2}|f(u)g(v)|dudv=\|f\|\cdot\|g\|.$$

13-8 这里有一个类似的例子, $\mathbb{R}$ 由 $\mathbb{Z}$ 替换, $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度由 $\mathbb{Z}$ 上的测度 m 替换, 对于这个测度, $m(X)=X$ 的基数 (对于所有有限的 $X\subset\mathbb{Z}$):

设 A 是从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $a:n\to a_n$ 的向量空间, 这些映射满足 $\sum|a_n|<\infty$; 如果令 $\|a\|=\sum|a_n|$, 则空间 A 成为一个赋范空间, 根据命题 8-9, 它是完备的.

对于所有 $a,b\in A$, 我们由关系

$$c_n=\sum_{i+j=n}a_ib_j$$

定义卷积 $c=a*b$.

由于族 (a_i) 和 (b_j) 是绝对可和的, 乘积 a_ib_j 的族也如此, 于是它的每个子族也如此; 这表明对于所有 n, c_n 有定义, 并且

$$\sum|c_n|\leqslant\left(\sum|a_n|\right)\left(\sum|b_n|\right).$$

换言之, $a*b$ 必然是 A 的一个元素, 并且 $\|a*b\|\leqslant\|a\|\cdot\|b\|$. 最后指出卷积是结合的 (和交换的), 而映射 $(a,b)\to a*b$ 是双线性的; 我们确实在 A 上定义了一个完备赋范代数结构.

这个代数 A 包含空间 l^1 作为闭子代数, l^1 由对于所有 $n<0, a_n=0$ 的可和的族组成.

13-9 设 Δ 是 $\mathbb{C}$ 的闭圆盘 $\{z:|z|\leqslant 1\}$; 而 $\mathscr{H}(\Delta)$ 是 $\mathscr{C}(\Delta,\mathbb{C})$ 的由在 Δ 内部全纯函数组成的子空间. 这是 Banach 代数 $\mathscr{C}(\Delta,\mathbb{C})$ 的一个重要的子代数; 全纯函数的一致极限是全纯函数, 这一事实蕴涵这个代数在 $\mathscr{C}(\Delta,\mathbb{C})$ 内是闭的, 从而是完备的.

13-10 在 $[0,1]$ 定义并且有连续的一阶导数的数值函数向量空间 $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ 是一个代数, 在其上赋以的是通常的乘积.

初等的计算表明范数

$$\|f\|=\sup_x|f(x)|+\sup_x|f'(x)|$$

(对于这个范数该空间是完备的) 跟定义在这个代数上的乘积是相容的.

注 13-11 $\mathbb{C}$ 上的所有赋范代数也是 $\mathbb{R}$ 上的赋范代数; 这两个代数同时完备或不完备.

命题 13-12 设 A 是一个赋范代数.

1° A 的乘法是连续的.

2° 对于系数在 $\mathbb{K}$ 内的 (或在 A 内的) 所有形式多项式 $P(X) = \sum a_n X^n$, 从 A 到 A 内的映射 $x \to P(x)$ 是连续的, 并且

$$\|P(x)\| \leqslant \sum \|a_n\| \cdot \|x\|^n.$$

事实上, xy 是 A 上的双线性函数; 由于 $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, 命题 6-1 表明它是连续的.

令 $x = y$, 由归纳法即推得, 对于任意整数 n 和任意 $a \in \mathbb{K}$, 任意 $a \in A$, 映射 $x \to ax^n$ 是连续的, 并且 $\|ax^n\| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|^n$.

由此立刻得到 $\|P(x)\|$ 的放大的估计, 再结合加法的连续性, 就证明了 $P(x)$ 的连续性.

13-13 设 A 是一个赋范向量空间; 假定 A 赋以了一个乘法, 使得 A 成为一个代数; 这未必就是一个赋范代数; 不过, 如果乘法是连续的, 即从 $A \times A$ 到 A 内的映射 $(x, y) \to xy$ 是连续的, 则从命题 6-1 推得存在 $k > 0$, 使得

$$\|x \cdot y\| \leqslant k \|x\| \cdot \|y\|.$$

如果令 $p(x) = k \|x\|$, 则 p 是 A 上的一个范数, 它与原来的范数等价, 并且满足

$$p(x \cdot y) = k \|x \cdot y\| \leqslant k^2 \|x\| \cdot \|y\| = p(x)p(y).$$

故新的范数跟乘法是相容的.

比如, 如果在 n 阶方阵的代数 $\mathscr{M}^{(n)}$ 里, 令 $\|M\| = \sup\limits_{i,j}|x_{ij}|$, 这样得到的范数跟乘法是不相容的, 但是此范数与 n 的乘积跟乘法是相容的.

单位元的范数 13-14 我们回想起所谓一个代数 A 的**单位元**是 A 的任何元素 e, 具有性质: 对于所有 $x \in A$ 有

$$e \cdot x = x \cdot e = x.$$

如果这样的元素 e 存在, 它必定是唯一的; 但是它有可能不存在; 我们可以对于前面列举的例子, 确定单位元存在的情形.

当 A 具有一个单位元时, 约定对于所有 $\lambda \in \mathbb{K}$, 把 A 的元素 λe 记做 λ. 由于下列事实这样约定是合理的: 从 $\mathbb{K}$ 到 A 的映射 $\lambda \to \lambda e$ 是单射, 并且对于所有 $x \in A$ 有关系 $\lambda x = (\lambda e)x$.

当 A 具有一个单位元时, 我们要用到的 ($\mathbb{K}$ 上的) 形式级数将表示成 $\sum\limits_0^\infty a_n X^n$; 如果没有常项, 就假定 $a_0 = 0$.

当赋范代数 A 具有一个单位元 e 时, 关系 $e = e \cdot e$ 蕴涵 $\|e\| \leqslant \|e\|^2$, 故 $\|e\| \geqslant 1$. 在前面的许多例子当中, 我们有 $\|e\| = 1$. 不过, 有可能像在例 13-3 中那样, $\|e\| \neq 1$; 尽管如此, 我们将看到可以用一个等价范数 p (在向量空间上的范数等价的意义下) 替换 A 的范数, 仍然跟乘法相容, 并且使得 $\|p(e)\| = 1$:

对于所有 $a \in A$, 用 $\bar{a}$ 表示从 A 到 A 内的线性映射 $x \to a \cdot x$; 由于 $\|a \cdot x\| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|$, $\bar{a}$ 是 $\mathscr{L}(A)$ 内的一个元素, 而从 A 到 $\mathscr{L}(A)$ 内的映射 $a \to \bar{a}$ 是线性的, 故如果令 $p(a) = \|\bar{a}\|$, 则 p 是 A 上的一个半范数.

关系 $\|ax\| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|$ 表明

$$p(a) = \|\bar{a}\| \leqslant \|a\|;$$

而另一方面

$$p(a) \geqslant \|e\|^{-1} \cdot \|a \cdot e\| = \|e\|^{-1} \cdot \|a\|,$$

故有

$$\|e\|^{-1} \cdot \|a\| \leqslant p(a) \leqslant \|a\|.$$

这个关系表明 p 是 A 上的一个等价于原来范数的范数. 代数 A 赋以这个范数之后同构于 $\mathscr{L}(A)$ 的由元素 $\bar{a}$ 组成的子代数; 必然有 $p(a \cdot b) \leqslant p(a)p(b)$ 和 $p(e) = 1$.

最后注意有可能在一个代数上存在好几个等价的跟乘法相容的并且使得 $\|e\| = 1$ 的范数; 比如, 如果 E 是一个有限维向量空间, 我们在代数 $A = \mathscr{L}(E)$ 上采用的范数满足所需条件, 而它是随 E 上的范数的选择改变的.

命题 13-15 (两个绝对可和族的乘积) 如果 $(a_i)_{i \in I}$ 和 $(b_j)_{j \in J}$ 是一个 Banach 代数的元素的两个绝对可和族, 其和分别是 α 和 β, 则乘积的族 $(a_i b_j)$ 也是绝对可和的, 并且其和是 $\alpha \cdot \beta$.

这个命题的断言, 推广了推论 9-22, 并且像这个推论一样, 由命题 9-21 推导出, 这是因为从 $A \times A$ 到 A 内的映射 $(x, y) \to x \cdot y$, 一方面是双线性的, 另一方面由于 $\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ 是连续的.

Banach 代数中的幂级数 13-16 在 $\mathbb{K}$ 上的一个代数 A 里, 可以做加法, 乘法; 故对于系数在 $\mathbb{K}$ 里的所有的形式多项式 $P(X)$ 可以关联从 A 到 A 内的映射 $x \to P(x)$. 如果 A 是一个赋范代数, 可以过渡到极限, 于是有理由期望定义系数在 $\mathbb{K}$ 里 (甚至在 A 里, 如果 A 是可交换的) 的幂级数的和.

如果 $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n + \cdots$ 表示 X 的系数在 $\mathbb{K}$ 里的形式级数, 称由

$$1/\rho = \overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{1/n}$$

定义的 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 的元素 ρ 为这个形式级数的**收敛半径**.

这个定义由下列熟知的事实验证: 如果 x 表示 $\mathbb{K}$ 的元素, 那么级数 $(a_n x^n)$ 当 $|x| < \rho$ 时收敛, 而当 $|x| > \rho$ 时发散.

在 Banach 代数里, 我们将重新得到这个结论的部分结果. 我们将要涉及的所有代数都假定为有一个记做 e 的单位元, 并且把 $\mathbb{K}$ 的元素 λ 和 A 的元素 λe 视作等同.

命题 13-17　设 A 是 $\mathbb{K}$ 上的一个 Banach 代数, 而 $(a_n X^n)$ 是 ($\mathbb{K}$ 上的) 一个收敛半径为 ρ (其中 $\rho > 0$) 的形式幂级数.

则对于所有正数 $r < \rho$, 级数 $(a_n x^n)$ 在球 $\{x : \|x\| \leqslant r\}$ 内收敛并且范数收敛. 其和 $f(x)$ 在球 $\{x : \|x\| < \rho\}$ 内是连续的.

证明　设 r' 是满足关系 $r < r' < \rho$ 的任意一个数. 对于所有充分大的 n, 我们有

$$|a_n|^{1/n} \leqslant 1/r';$$

于是如果 $\|x\| \leqslant r$, 则有

$$\|a_n x^n\| \leqslant |a_n| r^n \leqslant (r/r')^n.$$

通项为 $(r/r')^n$ 的几何级数是收敛的, 故级数 $(a_n x^n)$ 在球 $\{x : \|x\| \leqslant r\}$ 内是范数收敛的; 由于 A 是完备的, 它必定是收敛的.

级数的每个项 $a_n x^n$ 是连续的, 故范数收敛蕴涵这个级数的和 f 在每个开球 $\{x : \|x\| < r\}$ 上是连续的, 从而在开球 $\{x : \|x\| < \rho\}$ 上是连续的. □

注 13-18　跟在 A 是域 $\mathbb{C}$ 本身的经典情形的结论不同, 不能断定当 $\|x\| > \rho$ 时, 级数 $(a_n x^n)$ 发散; 这本质上来源于可能有 $\|x^n\| < \|x\|^n$, 而在 $\mathbb{C}$ 里 $\|x^n\| = \|x\|^n$.

比如, 如果存在 $u \neq 0$ 使得对于 $n \geqslant 2$ 有 $u^n = 0$ (特别在 2 阶矩阵的代数 $\mathscr{M}^{(2)}$ 里), 则级数 $(a_n x^n)$ 显然当 $x = ku$ 时收敛, 即使有 $\|ku\| > \rho$.

命题 13-19　设 $(a_n X^n)$ 和 $(b_n X^n)$ 是 X 的收敛半径分别是 α 和 β 的两个形式幂级数; 而 $(c_n X^n)$ 是由 $c_n = \sum\limits_{p+q=n} a_p b_q$ 定义的形式乘积.

如果 A 是一个 Banach 代数, 则对于所有使得 $\|x\| < \inf(\alpha, \beta)$ 的 $x \in A$, 级数 $(c_n x^n)$ 是绝对收敛的, 并且这些级数的和 $A(x), B(x), C(x)$ 满足关系

$$C(x) = A(x)B(x) = B(x)A(x)$$

证明　如果 $\|x\| < \alpha$ 和 β, 则级数 $(a_n x^n)$ 和 $(b_n x^n)$ 都是绝对收敛的; 于是 (见命题 13-15) 乘积 $a_p b_q x^{p+q}$ 的族是绝对可和的, 并且它们的和等于乘积 $A(x)B(x)$; 由于 $a_p b_q x^{p+q} = b_q a_p x^{p+q}$, 这个和也等于 $B(x)A(x)$. 和的结合性使得可以组合阶 $(p+q) = n$ 的项 $a_p b_q x^{p+q}$, 它们的和正是 $c_n x^n$; 故得到所求的结果. □

推论 13-20 设 A 是一个具有单位元的 Banach 代数. 则对于所有使得 $\|x\| < 1$ 的 $x \in A$, $(e-x)$ 是可逆的, 并且其逆元素是 $(e + x + \cdots + x^n + \cdots)$.

事实上, 取级数 $(a_n X^n)$ 为多项式 $(1-X)$, 取级数 $(b_n X^n)$ 为级数 $(1 + X + \cdots + X^n + \cdots)$; 这两个级数的形式乘积是常值 1.

另外, $\alpha = +\infty$, $\beta = 1$; 由命题 13-19 即得此推论.

经典的等式 $(1-x)(1+x+\cdots+x^n) = 1 - x^{n+1}$ 又提供了推论的一个直接证明.

有单位元的 Banach 代数上的指数 形式级数 $(X^n/n!)$ 有一个收敛半径等于 $+\infty$. 故如果 A 是一个 Banach 代数, 级数 $(x^n/n!)$ 在 A 里处处绝对收敛; 把它的和记做 $\exp x$ 或 e^x, 映射 $x \to \exp x$ 称为**指数**; 它是连续的.

命题 13-21 如果 x 和 y 是 A 的任意可交换的两个元素, 则

$$\exp(x+y) = (\exp x) \cdot (\exp y) = (\exp y) \cdot (\exp x).$$

证明 族 $(x^p/p!)$ 和 $(y^q/q!)$ 是绝对可和的, 乘积的族 $(x^p y^q/p!q!)$ 也如此, 并且有和 $(\exp x) \cdot (\exp y)$. 由于 $x^p y^q = y^q x^p$, 这个和也等于 $(\exp y) \cdot (\exp x)$.

此外, x 和 y 的交换性蕴涵对于所有 $n \geqslant 0$:

$$\sum_{p+q=n} \frac{x^p y^q}{p!q!} = \frac{1}{n!} \sum_{p+\varepsilon=n} \frac{(p+q)!}{p!q!} x^p y^q = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

$x^p y^q / p!q!$ 的和的结合性可使我们写出

$$(\exp x) \cdot (\exp y) = \sum_n \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$ □

推论 13-22 对于所有 $x \in A$ 和所有 $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ 有

$$\exp((\lambda + \mu)x) = (\exp \lambda x) \cdot (\exp \mu x).$$

推论 13-23 对于所有 $x \in A$, $\exp x$ 是可逆的, 并且其逆就是 $\exp(-x)$.

Banach 代数可逆元的群 像在所有的环里一样, 一个代数 A 的可逆元的集合组成对于乘法的一个群 G, 它的中性元就是 A 的单位元.

当 A 是一个 Banach 代数时, 可以精确化 G 的结构.

命题 13-24 设 A 是一个具有单位元的 Banach 代数.

1° A 的可逆元的群 G 是 A 的一个开集.

2° G 的由 A 诱导的拓扑跟 G 的群结构是相容的.

证明 1° 根据推论 13-20,G 包含中心为 e 半径为 1 的开球 V; 对于所有 $a \in G$, 映射 $x \to ax$ 是从 A 到自身上的一个同胚, 故 aV 是含有 a 的一个开集; 由于 aA 的所有元素是可逆的, 故 $aV \subset G$. 于是 G 是开集 aV 的并集; 因而它是开集.

2° 乘法在 A 里是连续的; 留下的是要证明映射 $x \to x^{-1}$ 在 G 里是连续的.

推论 13-20 表明这个映射在点 $x = e$ 是连续的; 为了证明它在所有点 $a \in G$ 的连续性, 把 x^{-1} 写成形式 $x^{-1} = a^{-1}v$, 其中 $v = u^{-1}$, 而 $u = xa^{-1}$.

映射 $x \to u$ 是连续的, 并且 $u(a) = e$; 映射 $u \to v$ 在 $u = e$ 是连续的; 又映射 $v \to a^{-1}v$ 是连续的; 随之映射 $x \to x^{-1}$ 在 $x = a$ 是连续的. □

例 设 E 是一个完备赋范空间; 代数 $\mathscr{L}(E)$ 就随之是完备的; 故 $\mathscr{L}(E)$ 的可逆元的集合是开集. 我们重新获得了一个在从 E 到自身上的同构的稳定性的研究中值得注意的结果.

IV. Hilbert 空间

首先引起数学家注意的赋范向量空间, 除 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 之外, 就数其范数类似 $\mathbb{R}^n$ 的 Euclid 范数的空间; 正是如此赋范的 Hilbert 空间, 给出了赋范空间的第一批例子和提供了对于分析学的重要应用.

早期利用这些空间的数学家看重的主要是计算的方便以及这些空间的几何跟有限维 Euclid 空间的几何之间的高度类似. 如今这类空间的价值仍不减当年, 并且仍然是这类空间在泛函分析和物理理论中最为有用.

§14. 准 Hilbert 空间的定义和初步性质

Hermite 型 14-1 $\mathbb{R}^3$ 的 Euclid 范数与传统的数量积 $(x|y) = \sum x_i y_i$ 通过关系 $\|x\|^2 = (x|x)$ 联系起来. 如果想在 $\mathbb{C}^3$ 内引进类似的概念, 而令 $(x|y) = \sum x_i y_i$, 将会面临双重困难: 一方面, 在 $\mathbb{C}^3$ 里存在 $x \neq O$, 使得 $(x|x) = 0$; 另一方面, $(x|x)$ 不是正的. 由此 $\mathbb{C}^3$ 上的双线性型 $(x|y)$ 不可能用来定义 $\mathbb{C}^3$ 上的一个范数.

但是如果我们注意到 $\mathbb{C}$ 的经典范数的平方写成 $\|x\|^2 = x\overline{x}$, 令 $\|x\|^2 = \sum x_i \overline{x_i}$ 而在 $\mathbb{C}^3$ 上定义一个范数就显得自然了, 相应地把函数 $(x|y) = \sum x_i \overline{y_i}$ 称作 $\mathbb{C}^3$ 的数量积就顺理成章, 并且重新发现方便的关系 $\|x\|^2 = (x|x)$.

新的数量积 $(x|y)$ 对于 x 仍然是线性的, 但是对于 y 却是半线性的 (我们称所有从一个向量空间到另一个的映射 f 是**半线性的**, 如果它是可加的, 并且使得对于所有 $\lambda \in \mathbb{K}$ 有 $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$).

我们要系统地研究这样的数量积.

定义 14-2 *设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的一个向量空间. 如果从 $E \times E$ 到 $\mathbb{K}$ 内的一个映射 φ 满足条件*

1° 对于所有 $y \in E$, 映射 $x \to \varphi(x, y)$ 是 E 上的一个线性型;

2° 对于所有 $x, y \in E$, 有 $\varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$,
则称 φ 为 E 上的 Hermite **型**.

条件 2° 称为 Hermite **对称性**. 它蕴涵 $\varphi(x,x)$ 是实数; 当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时, 这就是通常的对称性.

性质 1°, 2° 蕴涵:

$$\varphi(x, y_1 + y_2) = \overline{\varphi(y_1 + y_2, x)} = \overline{\varphi(y_1, x)} + \overline{\varphi(y_2, x)} = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2);$$
$$\varphi(x, \lambda y) = \overline{\varphi(\lambda y, x)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\varphi(y, x)} = \overline{\lambda} \cdot \varphi(x, y).$$

故 φ 对于 y 是半线性的.

例 1° 我们要确定 $\mathbb{K}$ 上的 n 维空间 E 上的所有 Hermite 型; 设 (a_i) 是 E 的一个基; 用 $(x_i), (y_i)$ 表示 E 的两个点 x, y 对于这个基的坐标.

如果 φ 是 E 上的 Hermite 型, 则有

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum x_i a_i, \sum y_i a_i\right) = \sum x_i \overline{y_j} \varphi(a_i, a_j).$$

如果令 $\alpha_{ij} = \varphi(a_i, a_j)$, 则 Hermite 对称性蕴涵 $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$.

反之, 对于 n^2 个复数 α_{ij} 的组, 如果满足关系 $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$, 则函数 $\varphi(x,y) = \sum \alpha_{ij} x_i \overline{y_j}$ 是 E 上的一个 Hermite 型.

2° 设 E 是向量空间 $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{K})$, 而 α, β 是 $[0,1]$ 上的两个**取实值的**数值函数. 对于所有 $x, y \in E$, 令

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 (\alpha(t) x(t) \overline{y(t)} + \beta(t) x'(t) \overline{y'(t)}) dt.$$

函数 φ 显然对于 x 是线性的, 并且具有 Hermite 对称性, 故 φ 是 E 上的一个 Hermite 型.

定义 14-3 我们说 E 上的一个 Hermite 型是**正的**, 如果对于所有 $x \in E$ 有 $\varphi(x,x) \geqslant 0$; 我们说它是**正定的**或**非退化正的**, 如果对于所有 $x \neq O$ 有 $\varphi(x,x) > 0$.

显然, Hermite 型的带正系数的所有线性组合仍然是 Hermite 型.

例 在前面的例 1 中, 如果当 $i \neq j$ 时 $\alpha_{ij} = 0$, 而对于所有 $i, \alpha_{ii} \geqslant 0$, 则型 φ 是正的. 如果此外对于所有 i 有 $\alpha_{ii} > 0$, 则它是正定的.

在上面的例 2 中, 如果 $\alpha \geqslant 0$, 并且 $\beta \geqslant 0$, 则型 φ 是正的. 如果此外还有 $\alpha > 0$, 则此型是正定的; 反之, 如果 $\alpha = 0$, 而 $\beta > 0$, 则它是退化的.

命题 14-4 设 φ 是 E 上的一个正 Hermite 型. 则

1° 对于所有 $x, y \in E$, 有

$$|\varphi(x,y)|^2 \leqslant \varphi(x,x) \cdot \varphi(y,y) \qquad \text{(Cauchy-Schwarz 不等式)}.$$

如果 φ 是正定的, 仅当 x 和 y 线性相关时等式成立.

2° 映射 $x \to (\varphi(x,x))^{1/2}$ 是 E 上的半范数; 当 φ 是正定的时, 这是一个范数.

证明　1° 我们要利用对于所有 $\lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) \geqslant 0$ 这一事实; 今有

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda x + y, \lambda x + y) = a\lambda\overline{\lambda} + b\lambda + \overline{b\lambda} + c \geqslant 0, \tag{1}$$

其中我们令

$$a = \varphi(x,x), \quad b = \varphi(x,y), \quad c = \varphi(y,y).$$

如果 $a = c = 0$, 在 (1) 中令 $\lambda = -\overline{b}$, 即得

$$-2b\overline{b} \geqslant 0,$$

故 $b = 0$, 这时有 $|b|^2 = ac$.

否则, 比如说 $a \neq 0$, 在 (1) 中令 $\lambda = -\overline{b}a^{-1}$, 即得

$$\frac{ac - b\overline{b}}{a} \geqslant 0,$$

由于 $a > 0$, 由此即得要证的关系.

现在假定型 φ 是正定的; 关系 $f(\lambda) = 0$ 蕴涵 $\lambda x + y = \mathrm{O}$; 如果 $|b|^2 = ac$, 并且 $a \neq 0$, 上面的计算表明对于 $\lambda = -\overline{b}a^{-1}$ 有 $f(\lambda) = 0$, 由此得 $\lambda x + y = \mathrm{O}$; 如果 $c \neq 0$, 有类似的关系 $x + \mu y = \mathrm{O}$; 如果 $a = c = 0$, 则有 $x = y = \mathrm{O}$.

反之, 当 x 和 y 线性相关时, 显然有 $|b|^2 = ac$.

2° 令 $p(x) = (\varphi(x,x))^{1/2}$; 关系 $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ 在平方之后改写为

$$\varphi(x+y, x+y) \leqslant \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\left(\varphi(x,x) \cdot \varphi(y,y)\right)^{1/2},$$

或再改写为

$$2\mathscr{R}\varphi(x,y) = \varphi(x,y) + \overline{\varphi(x,y)} \leqslant 2\left(\varphi(x,x) \cdot \varphi(y,y)\right)^{1/2},$$

这由 Cauchy-Schwarz 不等式得到.

另外, 关系 $\varphi(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 \varphi(x,x)$ 表明

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x);$$

故 $p(x)$ 是一个半范数; 如果仅当 $x = \mathrm{O}$ 时 $p^2(x,x) = \varphi(x,x)$ 变为零, 即如果 φ 是正定的, 这是一个范数. □

定义 14-5　我们称所有向量空间 E 为**准** Hilbert **空间**, 如果它赋以了一个正定 Hermite 型 φ, 并且赋以了通过关系 $\|x\|^2 = \varphi(x,x)$ 与 φ 关联的范数.

如果赋范空间 E 是完备的, 则称它是 Hilbert **空间**.

通常把 $\varphi(x,y)$ 记做 $(x|y)$, 并且称 $(x|y)$ 为 x 和 y 的**数量积**. 在计算的过程中, 往往把 $(x|y)$ 记做 xy, 把 $(x|x)$ 记做 x^2.

如果 F 是 E 的一个向量子空间, 则 E 的数量积在 F 上的限制是 F 上的一个数量积.

注 14-6 如果 E 是 $\mathbb{C}$ 上的准 Hilbert 空间, 数量积 $(x|y)$ 取非实数值 (除非 E 退缩为 O); 故当把 E 看作 $\mathbb{R}$ 上的向量空间时, 这不是 E 上的数量积. 反之, 显然 $\mathscr{R}(x|y)$ 关于 x,y 是对称的, 并且在看作 $\mathbb{R}$ 上的向量空间的 E 上关于 x 是线性的; 此外 $(x|x)=\mathscr{R}(x|x)$, 故 $\mathscr{R}(x|y)$ 是实空间 E 上的数量积, 并且关联于 $(x|y)$ 的范数跟关联于 $\mathscr{R}(x|y)$ 的范数是相等的.

有时会有机会利用数量积 $\mathscr{R}(x|y)$, 我们将称之为关联于 $(x|y)$ 的实数量积, 或简单地称为 E 的实数量积.

准 Hilbert 空间的例子 14-7 向量空间 $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$ 赋以由

$$(x|y)=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$$

定义的数量积之后是一个复准 Hilbert 空间; 我们证明它不是完备的.

取 $x_n(t)=\inf(n,t^{-1/3})$; 则有

$$\|x_n-x_{n+p}\|^2=\int_0^1|x_n(t)-x_{n+p}(t)|^2dt\leqslant\int_0^{\varepsilon_n}t^{-2/3}dt,\qquad \text{其中}\varepsilon_n=1/n^3.$$

由于当 $n\to\infty$ 时, $\|x_n-x_{n+p}\|$ 关于 p 一致趋于 0 , 序列 (x_n) 是 E 的 Cauchy 序列; 但是它不收敛, 这是因为对于所有 $x\in E$ 我们有

$$\|x-x_n\|^2\geqslant\int_{\varepsilon_n}^1|x(t)-x_n(t)|^2dt=\int_{\varepsilon_n}^1|x(t)-t^{-1/3}|^2dt.$$

故

$$\liminf_{n\to\infty}\|x-x_n\|^2\geqslant\int_0^1|x(t)-t^{-1/3}|^2dt.$$

由于函数 $t^{-1/3}$ 在 $(0,1]$ 不是有界的, 故存在一个紧致区间, 在这个紧致区间上 $|x(t)-t^{-1/3}|^2>0$; 故这个函数的积分大于 0; 从而序列 (x_n) 不能以 x 作为极限.

事实上, 序列 (x_n) 真正的极限应该是函数 $t^{-1/3}$, 它属于一个包含 E 的 Hilbert 空间, 即在 $[0,1]$ 上平方可和的函数空间, 在积分论中将予以研究.

14-8 我们将看到前面定义的完备赋范空间 l_I^2 (参见 8-9) 是一个 Hilbert 空间; 为此只需确定它的范数关联于一个数量积.

对于所有 $x,y\in l_I^2$, 不等式 $2\sum|x_iy_i|\leqslant\sum(|x_i|^2+|y_i|^2)$ 表明族 $(x_i\overline{y_i})$ 是可和的.

于是令 $(x|y)=\sum x_i\overline{y_i}$; 这显然是 l_I^2 上的一个正 Hermite 型, 而关系 $(x|x)=\sum|x_i|^2$ 表明关联于这个型的半范数正是 l_I^2 的范数.

空间 l_I^2 的重要性来源于其数量积定义的简单性以及在后面 (参见 16-13) 将建立的下列事实: 所有 Hilbert 空间同构于一个空间 l_I^2. 当 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ 时, l_I^2 就是 $\mathbb{K}^n$, 当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时赋以了 Euclid 范数, 当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时赋以了 Hermite 范数; 当 $I = \mathbb{N}$ 时, l_I^2 正是 Hilbert 空间 l^2.

有用的等式和不等式 14-9 1° 沿用在 14-5 引进的简化的记号, Cauchy-Schwarz 不等式写做

$$|xy|^2 \leqslant x^2 y^2 \qquad \text{或} \qquad |xy| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

从这个不等式和不等式 $2ab \leqslant a^2 + b^2$(其中 $a, b \in \mathbb{R}$) 还得到

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2. \tag{1}$$

最后注意到与关系 $0 \leqslant (x - y)^2$ 等价的不等式

$$(x + y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2).$$

2° 从关系

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + xy + yx; \qquad (x - y)^2 = x^2 + y^2 - xy - yx$$

通过相加得到下列只涉及范数的重要等式:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{2}$$

有时把它表述为: 在所有平行四边形里, 对角线的平方和等于边的平方和.

3° 把 $(x + y)^2$ 和 $(x - y)^2$ 的展开式相减得到

$$2(xy + yx) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2. \tag{3}$$

当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时, 我们有 $xy = yx$, 故得

$$4xy = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时, 在 (3) 里把 y 换成 iy 即得

$$2(xy - yx) = i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2). \tag{3'}$$

把 (3) 和 (3′) 相加得到

$$4xy = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2). \tag{4}$$

这个关系表明准 Hilbert 空间的数量积由其范数确定.

两个准 Hilbert 空间的同构 14-10 设 E, F 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的两个准 Hilbert 空间. 如果从 E 到 F 上的向量同构 f 保持数量积, 即

$$\text{对于所有}\, x, y \in E, (f(x) | f(y)) = (x | y),$$

则说 f 是从 E 到 F 上的**同构**.

于是这个同构也保持范数; 故 E 和 F 同时完备或不完备.

反之, 如果 f 是一个向量同构, 而且它保持范数, 则根据 14-9 的等式 (4), f 必然保持数量积.

定义 14-11 (正交向量) 我们说一个准 Hilber 空间的两个**元素** x, y 是**正交的**, 如果数量积 $(x|y)$ 是零.

我们说 E 的两个**子集** X 和 Y 是**正交的**, 如果 X 的每个元素与 Y 的每个元素是正交的. 把这个关系记做 $X \perp Y$.

如果 $(x|y) = 0$, 则有 $(y|x) = (\overline{x|y}) = 0$, 故正交关系是对称的.

由于关系 $(x|x) = 0$ 蕴涵 $x = \text{O}$, 故仅有的跟自己正交的向量是 O; 此外, 这个向量跟所有 $x \in E$ 是正交的.

由上推知在 E 的向量子空间之间的正交关系是对称的, 而两个正交子空间仅有的公共点是 O. 于是在 $\mathbb{K}^n$ 里, 两个正交子空间的维数之和小于等于 n; 还有在 $\mathbb{R}^3$ 里两个平面决不会是正交的 (虽然在初等几何里在更弱的意义下可以是正交的).

更一般地, 我们说 E 的两个**仿射流形** X 和 Y 是**正交的**, 如果 E 的分别与 X 和 Y 平行的向量子空间是正交的.

命题 14-12 (Pythagore 定理) 设 x, y 是 $\mathbb{K}$ 上的准 Hilbert 空间的两个向量. 如果 x, y 是正交的, 则有 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时, 其逆亦真.

证明 关系 $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + xy + yx$ 表明, 如果 $xy = 0$, 则也有 $yx = 0$, 从而有 $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.

反之, 上面的关系表明 $xy + yx = 0$, 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 则有 $xy = yx$, 从而 $2xy = 0$, 随之 $xy = 0$. □

Z 与实数域的情形不同, 如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 那么关系 $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ 仅蕴涵 $2\mathscr{R}(xy) = xy + yx = 0$, 由此得 x, y 关于 E 的**实**数量积的正交性.

比如, 把 $\mathbb{C}$ 看作 $\mathbb{C}$ 上的向量空间, 那么在 $\mathbb{C}$ 里不存在任何非零的正交向量对, 不过, 当向量 $x = x_1 + ix_2, y = y_1 + iy_2$ 满足关系

$$\mathscr{R}(xy) = x_1y_1 + x_2y_2 = 0$$

时, 有等式

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

引理 14-13 在所有准 Hilbert 空间里, 从 $E \times E$ 到 $\mathbb{K}$ 的映射 $(x, y) \to (x|y)$ 是连续的.

证明 不论 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, $(x|y)$ 总是看作 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 E 上的双线性型. 根据命题 6-1, 不等式 $|(x|y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ 表明这个函数在 $E \times E$ 上是连续的. □

命题 14-14 E 的正交于一个向量 $a \neq O$ 的向量的集合是一个闭的超平面.

证明 所关注的集合是线性型 $f: x \to (x|a)$ 的零点集, 故这是一个超平面; 另外, 根据引理 14-13, 这个线性型是连续的, 故这个超平面 $f^{-1}(0)$ 是闭的. □

推论 14-15 E 的正交于一个集合 X 的向量的集合 X^0 是 E 的一个闭向量子空间 (有可能退缩为 O).

这是可以立即得到的, 因为 E 的所有闭向量子空间的交仍然是闭向量子空间.
显然 $(X \subset Y)$ 蕴涵 $(X^0 \supset Y^0)$; 如果用 X^{00} 表示 $(X^0)^0$, 则还有 $X^{00} \subset Y^{00}$.
注意由于 $X \subset X^{00}$, 还有 $X \perp X^0$.

两个点的中垂超平面 14-16 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的准 Hilbert 空间, 而 a, b 是 E 的两个不同的点. E 的跟 a 和 b 等距离的点的集合 X 由关系

$$(a-x)^2=(b-x)^2 \qquad \text{或} \quad x(b-a)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

定义. 如果令 $x=y+\frac{1}{2}(b+a)$, 则这个关系变为 $y(b-a)=0$. 故所找的集合是正交于 $(b-a)$ 的过点 a, b 的中间点的仿射超平面.

当 E 是 $\mathbb{C}$ 上的准 Hilbert 空间时, 如果给 E 赋以实数量积时就归结为前述情形; 实超平面 X 包含正交于 $(b-a)$ 并且过点 a, b 的中间点的仿射超平面, 但是并不等于后者.

两个非零向量的夹角 在初等几何里证明了, 如果 x, y 是 $\mathbb{R}^2$ 的两个非零向量, 则有关系

$$(x|y)=\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta,$$

其中 θ 是起点为 O 分别沿 x 和 y 的方向的两条半直线的夹角.

如果 E 是一个准 Hilbert 空间,Cauchy-Schwarz 不等式表明, 如果 x, y 是 E 的两个非零向量, 则有

$$-1 \leqslant \frac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leqslant 1.$$

另外, 用通项为 $(-1)^n t^{2n}/2n!$ 的级数定义的余弦函数的理论表明, 对于所有 $k \in [-1,1]$, 存在唯一的实数 $\theta \in [0,\pi]$, 使得 $\cos\theta=k$; 这就导致下列定义:

定义 14-17 由关系

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi; \qquad (x|y)=\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$$

定义的实数 θ 称为实准 Hilbert 空间的两个非零向量 x, y 的**夹角**.

说 θ 是锐角 (对应地, 直角, 钝角), 等价于说 $(x|y) > 0$ (对应地, $= 0, < 0$).

命题 14-4 表明仅当 x 和 y 线性相关时才有 $|\cos\theta| = 1$; 当 $y = \lambda x$, 并且 $\lambda > 0$ 时, $\theta = 0$; 当 $y = \lambda x$, 并且 $\lambda < 0$ 时, $\theta = \pi$.

在 $\mathbb{C}$ 上的准 Hilbert 空间里, 引进夹角概念的唯一途经是归结到实数量积 $\mathscr{R}(x|y)$ 的情形, 即令

$$\mathscr{R}(x|y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta.$$

借助这个定义, 对于所有 $x, y \neq \mathrm{O}$, 可以写出

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta.$$

Z 当利用**复** Hilbert 空间的夹角时, 千万不要忘记条件 $\theta = \pi/2$ 并不蕴涵 x, y 的正交性.

§15. 正交投影. 对偶的研究

不论在理论研究中, 还是在数学应用里, 经常会遇到下列类型的问题:

设 E 是一个赋范空间, X 是 E 的一个子集, 而 x 是 E 的一个点; 在 X 找一个点 x', 使得它最好地逼近 x, 换句话说, 从 x' 到 x 的距离等于从 x 到 X 的距离 $d(x, X)$.

一个这样的点 x' 称为 x 在 X 上的 **投影**.

当 X 紧致时, 这个问题至少有一个解 (参见第一章 17-4); 不然, 可能不存在任何解.

当 X 是一个准 Hilbert 空间的一个完备凸子集时, 下列定理经常提供回答; 它在分析中扮演关键的角色.

定理 15-1 设 E 是一个准 Hilbert 空间, 而 X 是 E 的一个完备凸子集.

1° E 的所有 x 具有唯一在 X 上的投影 x' (有时把它记做 $P_X(x)$);

2° x 的投影 x' 由下列关系刻画特征:

$$\text{对于所有 } u \in X,\ \mathscr{R}((x - x')|(u - x')) \leqslant 0;$$

3° 对于所有 x, y, 以及它们在 X 上的投影 x', y', 我们有

$$\|x' - y'\| \leqslant \|x - y\|.$$

证明 1° 令 $d = d(x, X)$; 对于所有 $\varepsilon > 0$, 用 B_ε 表示中心为 x 半径为 $(d + \varepsilon)$ 的闭球; 再令 $P_\varepsilon = X \cap B_\varepsilon$. x 在 X 上的投影的集合正是 P_ε 的交集; 问题在于证明这个交集含有唯一的点.

所有的 P_ε 不是空集, 由于 X 和 B_ε 都是凸的, P_ε 是凸的; 故对于所有的点 $a,b\in P_\varepsilon$, (a,b) 的中点 m 属于 P_ε; 14-9 中的等式 (2) 可使我们写出

$$\|x-a\|^2+\|x-b\|^2=2\|x-m\|^2+\frac{1}{2}\|a-b\|^2.$$

由于 $\|x-a\|,\|x-b\|,\|x-m\|$ 介于 d 和 $d+\varepsilon$ 之间, 我们有

$$\|a-b\|^2\leqslant 2(2(d+\varepsilon)^2-2d^2)=4\varepsilon(2d+\varepsilon).$$

这个不等式提供 P_ε 的直径的一个上界; 我们发现这个直径随 ε 趋于零.

另外 P_ε 是 ε 的递增函数, 故 P_ε 的交集等于递减序列 (P_{ε_n}) 的交集, 其中 $\varepsilon_n=n^{-1}$. 而 P_{ε_n} 在 X 内是闭的, 根据假定 X 是完备的; 第一章命题 20-6 保证 P_ε 的交集正好含有一个点.

2° 为了简化计算, 通过平移我们过渡到 x 在 X 的投影 $x'=\mathrm{O}$ 的情形.

对于所有 $u\in X$ 和所有 $\lambda\in(0,1]$, 我们有 $\lambda u\in X$; 故如果 O 是 x 在 X 上的投影, 则有

$$\|x\|^2\leqslant\|x-\lambda u\|^2,\quad \text{或}\quad 2\mathscr{R}(x|u)\leqslant\lambda\|u\|^2.$$

由于 λ 是任意小的, 我们有 $\mathscr{R}(x|u)\leqslant 0$; 这正是当 $x'=\mathrm{O}$ 时要证的关系.

反之, 如果对于所有 $u\in X$ 有 $\mathscr{R}(x|u)\leqslant 0$, 则有

$$\|x-u\|^2=(x-u)^2=x^2-2\mathscr{R}(x|u)+u^2\geqslant x^2=\|x\|^2,$$

故 O 必然是 x 在 X 上的投影.

3° 令 $x-y=(x-x')+(x'-y')+(y'-y)=(x'-y')+u$, 则有

$$(x-y)^2=(x'-y')^2+u^2+2\mathscr{R}(u|(x'-y')).$$

而

$$u(x'-y')=-(x-x')(y'-x')-(y-y')(x'-y').$$

根据断言 2°, 上式右端的实数部分是大于等于 0 的, 故得 $(x-y)^2\geqslant(x'-y')^2$.

这个不等式可以表述为从 E 到 X 的映射 P_X 是比为 1 的 Lipschitz 映射. □

注 断言 2° 可以用夹角表述; 事实上, 当 $x\neq x'$ 并且 $u\neq x'$ 时, 关系 $\mathscr{R}((x-x')|(u-x'))\leqslant 0$ 表示向量 $(x-x')$ 和 $(u-x')$ 的夹角大于等于 $\pi/2$.

推论 15-2 设 X 是准 Hilbert 空间 E 的一个完备凸锥. 用 x' 表示点 x 在 X 上的投影, 则有

$$\|x\|^2=\|x'\|^2+\|x-x'\|^2\qquad\text{和}\qquad\mathscr{R}(x|x')=(x'|x').$$

证明 这些关系的每一个都等价于关系 $\mathscr{R}(x'|x-x')=0$, 我们就来证明它.

由于 X 是一个锥, 对于所有 $\lambda>0$, 我们有 $\lambda x'\in X$; 于是在定理 15-1 的 2° 中的不等式 (2) 中令 $u=\lambda x'$; 对于 $\lambda<1$ 和 $\lambda>1$, 我们发现

$$\mathscr{R}(x-x'|x')\geqslant 0 \quad \text{和} \quad \mathscr{R}(x-x'|x')\leqslant 0,$$

故得欲证等式. □

推论 15-3 设 X 是准 Hilbert 空间 E 的一个完备向量子空间, $x\in E$.
则 x 在 E 上的投影 x' 是 X 的唯一使得 $(x-x')$ 正交于 X 的点.

证明 通过平移归结为 $x'=\mathrm{O}$ 的情形 (X 保持不变).

1° 设 O 是 x 在 X 上的投影, 则对于所有 $u\in X$ 有 $\mathscr{R}(x|u)\leqslant 0$. 设 v 是 X 的任意一个点, 则 $-v, iv, -iv$ 也属于 X, 故 $\mathscr{R}(x|u)\leqslant 0$ 当 $u=v, -v, iv$ 或 $-iv$ 时都是满足的; 由此推导出 $(x|v)$ 的实部和虚部都是零, 故 $(x|v)=0$.

2° 反之, 设对于所有 $v\in X$ 有 $(x|v)=0$, 则有

$$\|x-v\|^2=\|x\|^2+\|v\|^2\geqslant\|x\|^2,$$

故 O 是 x 在 X 上的投影. □

推论 15-4 (投影的传递性) 设 E 是一个准 Hilbert 空间, F 是 E 的一个完备向量子空间, X 是 F 的一个凸子集, x 是 E 的一个点, 而 x' 是它在 F 上的投影.
如果 x' 具有在 X 上的投影 x'', 则 x'' 是 x 在 X 上的投影; 其逆亦真.

证明 由于 $(x-x')$ 正交于 F, 对于所有 $y\in X$ 我们有

$$\|x-y\|^2=\|x-x'\|^2+\|x'-y\|^2.$$

故变量 y 的函数 $\|x-y\|$ 和 $\|x'-y\|$ 同时达到在 X 上的最小值; 遂得结论. □

注 15-5 推论 15-4 通过平移可以推广到 F 是 E 的完备仿射流形的情形. 于是如果 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 表示 E 的完备仿射流形的有限递减序列, 如果 x_1 表示 x 在 F_1 上的投影, 而 x_p 由归纳法定义为 x_{p-1} 在 F_p 上的投影, 则点 x_n 跟 x 在 F_n 上的投影重合. 这是在 $\mathbb{R}^3$ 里的初等几何的一个经典结果的推广.

Z 如果把 E 的子空间 F 换成 E 的任意完备凸集, 断言 15-4 是不成立的.

命题 15-6 (正交子空间) 设 X 是准 Hilbert 空间 E 的一个完备向量子空间.
1° 从 E 到 X 上的映射 P_X 是连续线性映射, 其范数是 1 (如果 $X\neq\{\mathrm{O}\}$);
2° 这个映射的核 $P_X^{-1}(\mathrm{O})$ 是正交于 X 的子空间 X^0, 并且 $X^{00}=X$;
3° E 是 X 和 X^0 的直和; 并且对于所有 $x\in E$ 有

$$\|x\|^2=\|P_X(x)\|^2+\|P_{X^0}(x)\|^2.$$

证明 1° 对于所有 $x, y \in E$ 和所有 $u \in X$, 根据推论 15-3, 我们有

$$(x - x')u = 0 \qquad \text{和} \qquad (y - y')u = 0.$$

于是对于所有 $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$((\lambda x + \mu y) - (\lambda x' + \mu y'))\, u = 0.$$

根据 15-3, $(\lambda x' + \mu y')$ 是 $(\lambda x + \mu y)$ 在 X 上的投影; 换句话说, $P_X(\lambda x + \mu y) = \lambda P_X(x) + \mu P_X(y)$, 由此即得 P_X 的线性性.

关系 $\|x\|^2 = \|x'\|^2 + \|x - x'\|^2$ 表明 P_X 减小范数; 另外 P_X 在 X 的限制是恒等映射, 故如果 $X \neq \{\mathrm{O}\}$, 则有 $\|P_X\| = 1$.

2° 根据 15-3,$P_X(x) = \mathrm{O}$ 等价于 $(x - \mathrm{O})$ 正交于 X, 故 $P_X^{-1}(\mathrm{O}) = \mathrm{X}^0$.

对于所有正交于 X^0 的 x, 同时有

$$x'(x - x') = 0 \qquad \text{和} \qquad x(x - x') = 0,$$

故 $(x - x')^2 = 0$, 随之有 $x = x'$; 换句话说 $x \in X$.

这表明 $X^{00} \subset X$; 而我们已经有了反向的包含关系, 故得 $X^{00} = X$.

3° 由于 $(x - x') \in X^0$, 关系 $x = x' + (x - x')$ 表明 $E = X + X^0$, 由于 X 和 X^0 仅有公共元素 O, E 必定是 X 和 X^0 的直和.

最后, 关系 $\|x\|^2 = \|P_X(x)\|^2 + \|P_{X^0}(x)\|^2$ 直接由 $x = x' + (x - x')$ 得到. □

推论 15-7 *对于 Hilbert 空间的所有向量子空间 X, X^{00} 是 X 的闭包.*

证明 由于 X^{00} 是闭的, 并且 $X \subset X^{00}$, 我们还有 $\overline{X} \subset X^{00}$; 另外, 关系 $X \subset \overline{X}$ 蕴涵 $X^{00} \subset (\overline{X})^{00} = \overline{X}$; 故得欲证之等式. □

Hilbert 空间的对偶空间 在 4-8 我们曾经看到赋范空间 E 的拓扑对偶空间 $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ 是一个完备赋范空间. 我们将要看到, 当 E 是一个 Hilbert 空间时, E' 和 E 是同构的, 它们之间的同构是值得注意的半线性的. 这个性质解释了 Hilbert 空间的重要作用.

定理 15-8 *设 E 是一个 Hilbert 空间, 而 E' 是它的拓扑对偶空间.*

1° 对于所有 $a \in E$, 线性型 $\varphi_a : x \to (x|a)$ 的范数是 $\|a\|$.

2° 从 E 到 E' 的映射 $a \to \varphi_a$ 是赋范空间 E, E' 之间的半线性同构.

证明 1° Cauchy-Schwarz 不等式表明 $\|\varphi_a\| \leqslant \|a\|$; 另外, 对于 $a \neq \mathrm{O}$, 如果 $x = \|a\|^{-1}a$, 则 $(x|a) = \|a\|$, 故 $\|\varphi_a\| \geqslant \|a\|$; 两个不等式合起来即得 $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

2° 从 E 到 E' 的映射 $a \to \varphi_a$ 是半线性的, 其意思是

$$\varphi_{a+b} = \varphi_a + \varphi_b; \qquad \varphi_{\lambda a} = \overline{\lambda}\varphi_a.$$

而这是 $(x|a)$ 对于 a 是半线性这一事实的推论.

另外, 映射 φ 保持范数, 故它是单射. 给我们留下的是证明它是满射的, 即所有 $u \in E'$ 有形式 φ_a:

如果 $u=0$, 它显然有形式 φ_a, 其中 $a=O$; 如果 $u \neq 0$, 设 X 是超平面 $u^{-1}(0)$; X 是闭的, 从而是完备的, 根据 15-6 中的 3°, 我们有 $E=X+X^0$, 由于 $X \neq E$, 在 X^0 里存在一个 $b \neq O$. 两个线性型 u 和 φ_b 在超平面 X 上变为零, 并且不恒等于零, 故它们是成比例的; 于是存在数值 λ, 使得对于所有 x 有 $u(x)=\lambda(x|b)$, 换言之, $u=\varphi_a$, 其中 $a=\overline{\lambda}b$. □

当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时, φ 是通常意义下的同构.

例 1° 我们给 $\mathbb{C}^n$ 赋以典范数量积

$$(x|y)=\sum x_i\overline{y_i}.$$

$\mathbb{C}^n$ 上的所有线性型 u 都有形式 $u(x)=\sum \alpha_i x_i$, 即 $u(x)=(x|a)$, 其中 a 是坐标为 $\overline{\alpha_i}$ 的点.

2° 命题 15-8 表明 Hilbert 空间 l_I^2 上的所有连续线性型以唯一方式写成形式 $x \to \sum x_i\overline{a_i}$, 其中 $\sum |a_i|^2<\infty$.

注 15-9 命题 15-8 不能推广到任何不完备的准 Hilbert 空间, 因为 E' 是完备的, 不可能同构于非完备的一个空间 E.

比如, 设 E 是 l^2 的由序列 (x_n) (其中 $n \geqslant 1$) 组成的子空间, 除有限个指标外, $x_n=0$. 设 a 是 l^2 的点, 其坐标 $a_n=n^{-1}$; 在 E 上由

$$x \to (x|a)=\sum n^{-1}x_n$$

定义的线性型是连续的, 但是显然不能写成形式 $(x|b)$, 其中 $b \in E$.

Hilbert 空间上的弱拓扑 在 3-11 我们曾经定义了一个拓扑向量空间的弱化拓扑. 当 E 是一个 Hilbert 空间时, 对于所有 $x \in E$, 如果 $x \neq O$, 则存在一个线性型 $u \in E'$, 使得 $u(x) \neq 0$ (比如 $u=\varphi_x$); 故 E 的弱化拓扑是分离的.

从命题 15-8 和在 3-11 陈述的收敛判别法得到下列判别法:

命题 15-10 *设 E 是一个 Hilbert 空间, x_0 是 E 的一个点, 而 $\mathscr{B}$ 是 E 上的一个滤子基.*

则 x_0 是 $\mathscr{B}$ 的弱极限等价于对于所有 $a \in E$ 有

$$(x_0|a)=\lim_{\mathscr{B}}(x|a).$$

Z 称 E 的关联于范数的拓扑为**强拓扑**, 称它的弱化拓扑为**弱拓扑**.

由于每个线性型 $x \to (x|a)$ 是连续的, $\mathscr{B}$ 向 x_0 的强收敛蕴涵 $\mathscr{B}$ 向 x_0 弱收敛. 由此得到如果 $\mathscr{B}$ 弱收敛到 x_0, 则 $\mathscr{B}$ 不可能强收敛到任何 $x_0' \neq x_0$; 但是有可能 $\mathscr{B}$ 不强收敛到 x_0. 这里有一个 l^2 中的例子.

设 u_n 是 l^2 的点, 除第 n 个坐标为 1 外, 其余的坐标均为 0. 对于所有 $a \in l^2$, 序列 $(u_n|a)$ 趋于 0, 故序列 (u_n) 弱收敛于 O; 但是这个序列不强收敛于 O, 因为对于所有 n 有 $\|u_n\| = 1$.

命题 15-11 设 E 是一个 Hilbert 空间, x_0 是 E 的一个点, 而 $\mathscr{B}$ 是 E 上的一个滤子基; 则下列断言是等价的:

1° $$x_0 = 强\lim_{\mathscr{B}} x;$$

2° $$x_0 = 弱\lim_{\mathscr{B}} x, \quad 并且 \quad \|x_0\| = \lim_{\mathscr{B}} \|x\|.$$

证明 1° ⇒ 2° 是显然的; 我们证明反向的蕴涵关系.

假设条件蕴涵 x_0^2 是 xx_0 (从而也是 x_0x 的) 的和 x^2 的极限. 故 $(x_0^2 + x^2)$ 和 $(x_0x + xx_0)$ 有极限 $2x_0^2$; 遂得

$$\lim_{\mathscr{B}} (x_0 - x)^2 = \lim_{\mathscr{B}} (x_0^2 + x^2 - (x_0x + xx_0)) = 0.$$

换句话说, $\mathscr{B}$ 强收敛到 x_0.

§16. 正交系

在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 里的正交坐标系的方便性促使我们考察在准 Hilbert 空间里是否能够利用类似的坐标系; 完全正交系将起这个作用.

定义 16-1 设 E 是一个准 Hilbert 空间. 称 E 的非零的两两正交的元素的任意族 $(a_i)_{i\in I}$ 为在 E 里的**正交系** (或族).

如果所有 a_i 的范数的值是 1, 则说这个正交系 (a_i) 是**标准正交的**.

一个标准正交系 (a_i) 由下列关系刻画特征:

$$(a_i|a_j) = \delta_{ij},$$

其中的 δ_{ij}, 按照 $i \neq j$ 或 $i = j$, 等于 0 或 1.

直接看出, 如果 (a_i) 是正交系, 则 $\|a_i\|^{-1}a_i$ 就是标准正交系.

任意正交系都是线性无关的; 事实上, 如果 $\sum\limits_{i\in J} \lambda_i a_i = O$, 其中 J 是 I 的一个有限子集, 则有

$$\left(\sum \lambda_i a_i\right)^2 = \sum |\lambda_i|^2 a_i^2 = 0,$$

于是对于所有 $i \in J$ 有 $\lambda_i = 0$.

定义 16-2 设 (a_i) 是 E 里的一个标准正交系. 对于所有 $x \in E$, 称数量积 $\xi_i = (x|a_i)$ 为 x 对于这个系的**指标为 i 的坐标**.

x 的坐标 ξ_i 仅依赖元素 a_i, 而不依赖系的其余元素.

命题 16-3 设 E 是一个准 Hilbert 空间. 则对于 E 里的所有标准正交系 (a_i) 和所有 $x \in E$, $|\xi_i|^2$ 的族是可和的, 并且

$$\sum_i |\xi_i|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad \text{(Bessel 不等式)}.$$

证明 问题归结为证明对于 I 的任意有限的子集 $J \subset I$ 有

$$\sum_{i \in J} |\xi_i|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

而关系 $(\xi_i a_i | x - \xi_i a_i) = 0$ 给出 $(\xi_i a_i | x) = (x | \xi_i a_i) = |\xi_i|^2$, 故

$$0 \leqslant (x - \sum_{i \in J} \xi_i a_i)^2 = x^2 - \sum_{i \in J} |\xi_i|^2,$$

遂得欲证之关系. □

现在要刻画使得 $|\xi_i|^2$ 的和等于 $\|x\|^2$ 的标准正交系的特征.

我们回忆以下定义: 说 E 的元素的一个族 (a_i) 是**完全的**, 如果由它生成的 E 的向量子空间在 E 里是处处稠密的, 或 E 的所有元素都是元素 a_i 的线性组合的极限.

定理 16-4 设 E 是一个准 Hilbert 空间, 而 (a_i) 是 E 里的一个标准正交系. 下列断言是等价的:

1° 对于所有 $x, y \in E$, $\xi_i \overline{\eta_i}$ 的族是可和的, 并且其和是 $(x|y)$;

2° 对于所有 $x \in E$, 有 $\|x\|^2 = \sum |\xi_i|^2$ (Parseval 等式);

3° 对于所有 $x \in E$, 族 $(\xi_i a_i)$ 是可和的, 并且其和是 x;

4° 族 (a_i) 在 E 里是完全的.

证明 1° ⇒ 2° 事实上, 2° 是 1° 的特殊情形.

2° ⇒ 3° $|\xi_i|^2$ 的族的和是 $\|x\|^2$, 对于所有 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的有限子集 J_0, 使得对于所有包含 J_0 的有限的 $J \subset I$ 有

$$\|x\|^2 - \sum_{i \in J} |\xi_i|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

于是有

$$(x - \sum_{i \in J} \xi_i a_i)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i \in J} |\xi_i|^2 \leqslant \varepsilon^2, \qquad \text{由此得到} \|x - \sum_{i \in J} \xi_i a_i\| \leqslant \varepsilon,$$

这就证明了欲证的性质.

$3° \Rightarrow 4°$　由于对于所有 $x \in E$ 有 $x = \sum \xi_i a_i$, 故所有 x 是 $\xi_i a_i$ 的有限和的极限, 从而族 (a_i) 是完全的.

$4° \Rightarrow 1°$　设 $x \in E$, 给定 $\varepsilon > 0$; 根据假设, 存在有限线性组合 $y = \sum\limits_{i \in J} \alpha_i a_i$, 使得 $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$; 故对于 x 在有限族 $(a_i)_{i \in J}$ 生成的完备子空间上的投影 x' **更加**满足 $\|x - x'\| \leqslant \varepsilon$; 而向量 $(x - \sum\limits_{i \in J} \xi_i a_i)$ 正交于每个 a_i (其中 $i \in J$), 故 $x' = \sum\limits_{i \in J} \xi_i a_i$.

于是我们有

$$0 \leqslant (x - \sum_{i \in J} \xi_i a_i)^2 = x^2 - \sum_{i \in J} |\xi_i|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

这个不等式对于所有 ε 均成立, 考虑到 Bessel 不等式, 即得

$$\|x\|^2 = \sum_i |\xi_i|^2 = \sum_i \xi_i \overline{\xi_i}. \tag{1}$$

现在设 x, y 是 E 的任意两个元素, 它们的坐标是 (ξ_i) 和 (η_i), $|\xi_i|^2$ 和 $|\eta_i|^2$ 的可和性蕴涵 $\xi_i \overline{\eta_i}$ 和 $\overline{\xi_i} \eta_i$ 的可和性; 这就使得在等式

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2 + i\left((x + iy)^2 - (x - iy)^2\right)$$

里可以利用关系 (1) 表示 ξ_i 和 η_i 的函数的平方; 就得到了等式: $xy = \sum \xi_i \overline{\eta_i}$.　□

定义 16-5　*在一个准 Hlibert 空间 E 里, 所有满足定理 16-4 的断言之一的标准正交系称作 E 的***标准正交基**.

把公式推广到正交基 16-6　经常会碰到这样的情形, 自然地出现在一个理论中的族 (a_i) 不是一个标准正交基, 但是存在数值 $\lambda_i \neq 0$ 使得 $b_i = \lambda_i a_i$ 的族是一个标准正交基.

我们说这样的族 (a_i) 是 E 的一个**正交基**. 说一个族 (a_i) 是这样的基, 显然等价于它是正交的和完全的.

关系

$$x = \sum \xi_i b_i \quad 和 \quad \|x\|^2 = \sum_i |\xi_i|^2, \quad 其中 \quad \xi_i = (x|b_i)$$

就变为

$$x = \sum \alpha_i a_i \quad 和 \quad \|x\|^2 = \sum_i \|a_i\|^2 \cdot |\alpha_i|^2, \quad 其中 \quad \alpha_i = \frac{(x|a_i)}{\|a_i\|^2}.$$

数值 α_i 称为 x 在基 (a_i) 里的指标为 i 的 Fourier 系数; 更一般地, 不论 (a_i) 完全与否, 都称 $\alpha_i = (x|a_i)/\|a_i\|^2$ 为 x 对于正交系 (a_i) 的 Fourier 系数.

实际上, 可以不经过中间的 b_i 而直接形式地写出

$$x = \sum \alpha_i a_i, \qquad 由此得到 \quad x^2 = (\sum \alpha_i a_i)^2 \quad 和 \quad x a_i = (\sum \alpha_i a_i) a_i.$$

形式地展开后两式就得到上面写出的公式.

Z 必须指出的是, 根据命题 16-13, 一个 Hilbert 空间 E 的 "标准正交基" (或正交基) 仅当 E 是有限维时, 才是 E 的代数基 (参见习题的 195 题).

Hilbert 空间里的标准正交基的特征刻画

定义 16-7 设 E 是一个准 Hilbert 空间. 在 E 里的一个标准正交系 $(a_i)_{i\in I}$, 如果所有包含它的标准正交系跟它是相等的, 则说它是**最大的**.

这个条件等价于说所有正交于每个 a_i 的向量 x 是零向量; 换句话说,(对于所有 $i\in I$ 有 $(x|a_i)=0$) 蕴涵 ($x=\mathrm{O}$). 再一个说法是: 所有坐标 ξ_i 是零的向量 x 是 $x=\mathrm{O}$.

命题 16-8 如果 E 是完备的, 则定理 16-4 的四个等价断言等价于

5° 标准正交系 (a_i) 是完全的;

证明 1° 设系 (a_i) 满足断言 3. 关系 $x=\sum\xi_i a_i$ 表明: 如果所有 ξ_i 是零, 则 $x=\mathrm{O}$, 故系 (a_i) 是最大的.

2° 反之, 假定系 (a_i) 是最大的; 设 L 是由 a_i 生成的向量空间. 如果 $\overline{L}\neq E$, 命题 15-6 表明存在一个向量 $x\neq\mathrm{O}$, 并且正交于 $\overline{L}$, 当然也正交于每个 a_i, 由于 (a_i) 是最大的, 这是不可能的.

于是有 $\overline{L}=E$, 换句话说, 系 (a_i) 是完全的. □

Z 命题 16-8 不能推广到不完备的准 Hilbert 空间 (参见习题的 197, 198, 199 题); 不过, 这并非说这样的空间不可能具有标准正交基.

标准正交基的存在性 定理 16-4 的四个断言表明标准正交基对于表示准 Hilbert 空间的元素的用途. 了解这类基的存在性的充分条件也就变得至关重要了.

借助不同的方法, 我们将要证明这样的基在完备空间 E 里存在, 以及在可分空间里存在.

引理 16-9 一个准 Hilbert 空间的每个标准正交系必被包含于一个最大标准正交系内.

证明 我们先回忆归纳偏序集的概念. 如果一个偏序集 A 的所有全序子集在 A 里都有上界, 则说它是**归纳的**; 再回忆 Zorn 定理 (等价于选择公理):

"在归纳偏序集里 A 里, 必有一个最大元素."

为了应用 Zorn 定理, 把 E 的标准正交系看作 E 的子集是方便的 (不再看作其元素有指标的集).

如果定义 E 的标准正交系 s 的集合 A 由包含关系排序, A 就成为一个归纳偏序集; 事实上, 设 S 是 A 的一个全序子集; $s\in S$ 的并集 $\widehat{S}$ 是标准正交的, 因为如果

a_1, a_2 是它的两个不同的分别属于 s_1, s_2 (这里比如 $s_1 \subset s_2$) 的元素, a_1, a_2 属于 s_2, 故是正交的. 从而 $\widehat{S}$ 是 A 的一个元素, 它大于或等于所有 $s \in S$; 这就证明了 A 是归纳的, 遂得引理. □

命题 16-10 所有 Hilbert 空间都具有一个标准正交基.

证明 引理 16-9 表明 E 包含一个最大标准正交系, 根据命题 16-8, 它就是标准正交基. □

更一般地, 从断言 16-8 和 16-9 得到在一个 Hilbert 空间里, 所有标准正交系, 不论有限或无限, 都包含在一个标准正交基里.

引理 16-11 设 E 是一个准 Hilbert 空间, 而 $(a_0, a_1, \cdots)$ 是 E 的线性无关向量的一个有限或无限序列; 对于所有 n, L_n 是由 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 生成的 E 的子空间.

如果 $b_0 = a_0$, 而 $b_{n+1} = a_{n+1} - P_{L_n}(a_{n+1})$, 则序列 (b_n) 是一个正交系, 并且对于所有 n, 向量 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 生成 L_n.

证明 我们进行归纳推理, 假定 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 是一个正交系, 它生成 L_n.

关系 $b_{n+1} = a_{n+1} - P_{L_n}(a_{n+1})$ 表明 $b_{n+1} \neq O$, 这是因为 a_{n+1} 不属于 L_n, 根据推论 15-3, b_{n+1} 正交于 L_n. 故 $(b_0, b_1, \cdots, b_{n+1})$ 是一个正交系, 并且由于 $a_{n+1} = b_{n+1} + (L_n\text{的一个向量})$, 故这个系跟 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n+1})$ 生成同样的空间. □

正交序列 (b_n) 称为**用** Gram-Schmidt **正交化算法由** (a_n) **诱导的正交系**.

实践上, 序列 (b_n) 这样确定: 当 b_i 对于 $i \leqslant n$ 被确定后, 令

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{1}^{n} \lambda_i b_i$$

对于 $i \leqslant n$ 就应该有

$$0 = (a_{n+1}|b_i) + \lambda_i(b_i|b_i), \text{由此得到}\lambda_i.$$

如果令 $b'_n = \|b_n\|^{-1} b_n$, 则序列 (b'_n) 显然是标准正交的.

命题 16-12 所有可分的 (即包含一个处处稠密的可数子集的) 准 Hilbert 空间有有限或可数的标准正交基.

证明 根据假设, 存在 E 的可数子集 D, 使得 $\overline{D} = E$. 把 D 的点编号成为一个序列 (α_n), 并且用 (α_{i_n}) 表示这个序列的子序列, 它由这样的 α_i 组成, 它不是指标 $j < i$ 的元素 α_j 的线性组合. 由构造过程得知 α_{i_n} 是线性无关的, 并且简单的归纳推理表明所有 α_i 都是元素 α_{i_n} 的线性组合, 故序列 (α_{i_n}) 在 E 里是完全的.

从序列 (α_{i_n}) 通过 Gram-Schmidt 正交化算法诱导的序列是完全的, 因为它跟序列 (α_{i_n}) 生成同样的向量空间; 故这是 E 的正交基; 从它立刻得到一个标准正交基. □

断言 16-11 和 16-12 对于函数的表示极端重要; Fourier 级数和正交多项式的研究就提供了应用实例.

命题 16-13 (Hilbert 空间的同构) 设 E 是一个赋以了标准正交基 $(a_i)_{i\in I}$ 的准 Hilbert 空间. 如果对于所有 $x \in E$, 用 ξ_i 表示它对于这个基的指标为 i 的坐标, 则从 E 到 l_I^2 的映射 $f: x \to (\xi_i)$ 是从 E 到 l_I^2 的一个在 l_I^2 处处稠密的向量子空间上的一个同构. 当 E 是完备空间时, 这个映射是从 E 到 l_I^2 上的一个同构.

证明 定理 16-4 表明对于所有 $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum |\xi_i|^2$, 故 (ξ_i) 是 l_I^2 的一个点, 映射 f 显然是线性的, 并且保持范数; 故根据 14-10, f 是从 E 到 $f(E)$ 的一个同构.

由于 $f(E)$ 显然包含 l_I^2 的典范基, 而后者在 l_I^2 内是完全的, 故 $f(E)$ 在 l_I^2 内是处处稠密的.

特别地, 如果 E 是完备的, 则 $f(E)$ 也如此; 故 $f(E)$ 在 E 内同时是处处稠密和闭的, 换言之, $f(E) = l_I^2$. □

推论 16-14 设 E 是一个 Hilbert 空间, 而 $(a_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个标准正交基. 则对于 $\mathbb{K}$ 的元素所有满足关系 $\sum |\xi_i|^2 < \infty$ 的族 $(\xi_i)_{i\in I}$, 存在 E 的一个在给定基里坐标为 (ξ_i) 的点 x.

这个断言直接从 16-13 得到, 并且是定理 16-4 的断言 2 的逆命题.

推论 16-15 设 E 是一个可分的准 Hilbert 空间.

如果 E 是有限维的, 维数是 n, 则 E 同构于 $\mathbb{K}^n$.

如果 E 的维数是无穷, 则 E 同构于 l^2 的一个处处稠密的子空间; 如果 E 是完备的, 则 E 同构于 l^2 本身.

这是 16-12 和 16-13 的直接推论.

命题 16-16 1° Hilbert 空间 E 的所有标准正交基有同样的基数 (称为 E 的 Hilbert **维数**).

2° 两个 Hilbert 空间是同构的等价于它们的 Hilbert 维数相等.

证明 1° 如果 E 的维数是 n, 则 E 的任一标准正交基是一个代数基, 故它的基数是 n.

假定 E 的维数是无穷的, 而 $(a_i)_{i\in I}$ 和 $(b_j)_{j\in J}$ 是 E 的两个标准正交基.

元素 a_i 的带有理系数 (如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 复有理系数) 的有限线性组合的集合 A 在 E 内是处处稠密的; 而因为 I 是无穷的, $\mathbb{Q}$ 是可数的, A 和 I 的基数 $\overline{\overline{A}}$ 和 $\overline{\overline{I}}$ 是相等的 (利用我们承认的事实: 对于所有整数 p, I 和 I^p 有同样的基数).

而在 E 里半径为 2^{-1} 中心为 b_j 的开球 B_j 是两两不交的; 由于每个 B_j 含有 A 的至少一个点, 故有 $\overline{\overline{J}} \leqslant \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{I}}$.

同样的方式得到 $\overline{\overline{I}} \leqslant \overline{\overline{J}}$; 故 $\overline{\overline{I}} = \overline{\overline{J}}$.

2° 两个 Hilbert 空间之间的每个同构, 都把一个空间的任一标准正交基变成另一个空间的标准正交基; 因此两个同构的空间有同样的 Hilbert 维数.

反之, 如果两个 Hilbert 空间 E, F 有同样的 Hilbert 维数, 则它们有指标集 I 相同的标准正交基. 根据命题 16-13, 空间 E, F 的每一个都同构于 l_I^2; 因而它们是同构的. □

注 16-17 最有用的 Hlibert 空间是 Hlibert 维数为 $\aleph_0$ 的 Hilbert 空间. 到目前为止, 我们遇到的仅有的这样的空间是 l^2; 在积分论里将看到其他的重要的这样的具体空间.

§17. Fourier 级数和正交多项式

Fourier 级数 设 E 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}$ 的周期为 2π 的连续映射的向量空间.

对于所有 $x, y \in E$, 令

$$(x|y) = \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}dt = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} x(t)\overline{y(t)}dt.$$

这个正 Hermite 型是 E 上的一个数量积, 这是因为关系 $(x|x) = 0$ 和 x 的连续性蕴涵对于所有 $t \in [0, 2\pi]$ 有 $x(t) = 0$, 随之由于 x 是以 2π 为周期的, 故对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 有 $x(t) = 0$.

空间 E 赋以了这个数量积是一个准 Hilbert 空间, 但它不是完备的 (参见例子 14-7), 只有用在后面的 Lebesgue 积分的意义下平方可和的并且以 2π 为周期的函数的空间取代 E , 才能得到完备空间.

对于所有 $n \in \mathbb{Z}$, 用 a_n 表示函数 $t \to e^{int}$, 它显然属于 E.

命题 17-1 1° 函数 e^{int} 的族是 E 的一个正交基.

2° 对于所有 $x \in E$ 有

$$(x|x) = 2\pi \sum |\alpha_n|^2, \quad 其中\ \alpha_n = (x|a_n)/2\pi.$$

3° 函数 $\alpha_n e^{int}$ 的族在 E 是可和的, 并且其和是 x.

证明 我们有

$$(a_p|a_q) = \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)t}dt = 0\ (如果 p \neq q), \quad 或\ 2\pi\ (如果 p = q),$$

故族 (a_n) 是正交的.

另外, 根据第二章第 12 节的应用 2°, 所有函数 $x \in E$ 是函数 a_n 的线性组合的一致收敛的极限; 于是关系

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leqslant 2\pi(\sup|f(t)|)^2$$

表明一致收敛蕴涵对于 E 的 Hilbert 范数的收敛.

于是得到 a_n 的族在 E 里是完全的, 因此它是 E 的正交基.

断言 2 和 3 可从定理 16-4 和 16-6 的公式得到. □

注 17-2 有时候, 尤其当研究的函数取实值时, 用函数 $\cos nt$ (其中 $n \geqslant 0$) 和 $\sin nt$ (其中 $n \geqslant 1$) 的族代替函数 e^{int} 会更方便. 初等计算表明这个族也是正交的.

此外, 这个族在 E 内是完全的. 由于族 (e^{int}) 是完全的, 关系 $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$ 表明每个 e^{int} 是 $\cos nt$ 和 $\sin nt$ 的线性组合; 故后者组成 E 的正交基.

如果用 c_n 和 s_n 分别表示元素 $\cos nt$ 和 $\sin nt$, 则 $x \in E$ 的 Fourier 系数 γ_n 和 σ_n 由下面的关系给定:

$$\gamma_0 = (x|c_0)/2\pi; \quad \gamma_n = (x|c_n)/\pi; \quad \sigma_n = (x|s_n)/\pi, \text{对于} n \geqslant 1.$$

这里的 Parseval 关系写成

$$(x|x) = 2\pi|\gamma_0|^2 + \pi \sum_1^\infty (|\gamma_n|^2 + |\sigma_n|^2).$$

Z 命题 17-1 表明对于所有函数 $x \in E$, 函数序列

$$x_n(t) = \sum_{-n}^{n} \alpha_p e^{ipt}$$

均方收敛到 x. 但是关于简单收敛和一致收敛却只字未提.

当研究积分时我们将再回到收敛问题上来. 这里只是简单地指出如果函数 x_n 的序列一致收敛到一个函数 x', 则有 $x' = x$; 事实上, 序列 (x_n) 在 E 的收敛意义下也收敛到 x', 由于仅有一个极限点, 故 $x' = x$.

正交多项式 17-3 设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个有界或无界的闭区间, 而 p 是一个连续并且在 I 内部大于 0 的数值函数, 满足条件: 对于所有整数 $n \geqslant 0$ 有

$$\int_I |t|^n p(t)dt < \infty.$$

称这样的一个函数为 I 上的**权函数**.

设 E_p 是 $\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ 的由使得

$$\int_I |x(t)|^2 p(t)dt < \infty$$

的函数 x 组成的子集.

关系 $|x+y|^2 \leqslant 2(|x|^2 + |y|^2)$ 和 $2|xy| \leqslant |x|^2 + |y|^2$ 表明 E_p 是一个向量空间, 并且函数

$$(x|y) = \int_I x(t)\overline{y(t)}p(t)dt$$

是 E_p 上的一个正 Hermite 型.

此外, 由于 p 是连续的, 并且在 I 的内部大于 0, 关系 $(x|x) = 0$ 蕴涵对于所有 $t, x(t) = 0$, 故 $x = \mathrm{O}$; 换句话说, $(x|y)$ 是 E_p 上的一个数量积, 它使得 E_p 成为一个准 Hilbert 空间.

对于 p 所做的假设蕴涵单项式 t^n 是 E_p 的一个元素; 而 t^n 是线性无关的, 这是因为在 I 上恒等于零的所有多项式的所有系数都是零; 于是可以对于 t^n 利用 Gram-Schmidt 正交化算法.

令 $a_n(t) = t^n$; 归纳关系

$$P_0 = a_0; \qquad P_n = a_n - P_{L_{n-1}}(a_n)$$

表明 P_n 是实系数的 n 阶多项式, 并且其最高阶项是 t^n.

P_n 称为 I 上**关联于权** p **的正交多项式**.

在某些问题中, 有时人们会用成比例的多项式 $p_n = \lambda_n P_n$ 代替 P_n, 其中 λ_n 是一个不等于零的数 (例如有时假定 p_n 在 I 的一个端点取值为 1); 但在下文中, 我们仅考虑 P_n

经典例子 17-4

1° $I = [-1, 1]$ 而 $p(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ (其中 α 和 $\beta > -1$).

对应的多项式 P_n 称为 Jacobi **多项式**.

对于 $\alpha = \beta = 0$ (从而 $p(t) = 1$), 这是 Legendre **多项式**.

对于 $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, 这是 Tshebyscheff **多项式**.

2° $I = [0, \infty)$, 而 $p(t) = e^{-t}$.

对应的多项式 P_n 称为 Laguerre **多项式**.

3° $I = (-\infty, +\infty)$, 而 $p(t) = e^{-t^2}$.

对应的多项式 P_n 称为 Hermite **多项式**

命题 17-5 当区间 I 是紧致的时候, I 上的关联于权 p 的多项式序列 P_n 是准 Hilbert 空间 E_p 的正交基.

证明 I 上的所有连续函数是多项式的一致收敛的极限 (见第二章 12-5 的应用 1°), 故是 P_n 的线性组合的一致收敛的极限. 于是 P_n 的序列在 E_p 里是完全的 (跟命题 17-1 的证明相同); 另外, 由于它是正交的, 故是 E_p 的正交基. □

Z 1° 当区间 I 不是有界的时, 在 I 上存在这样的权 p, 使得序列 P_n 不是 E_p 的正交基. 但是已经证明, 对于 Laguerre 多项式和 Hermite 多项式, 它们还是组成 E_p 的正交基.

2° 像对于 Fourier 级数一样, 关联于一个元素 $x \in E_p$ 的通项为 $\alpha_n P_n(t)$ 的级数并不总是一致收敛, 甚至不是简单收敛到函数 $x(t)$, 但是如果它一致收敛, 则必然收

敛到 $x(t)$.

正交多项式序列的一般性质 我们将证明在一个区间 I 上的关联于权 p 的正交多项式序列 (P_n) 具有独立于权的有趣的性质; 为此我们利用下列两个显然的注释:

17-6 对于所有 n, 多项式 P_n 跟所有阶数小于 n 的多项式 Q 是正交的, 这是因为一个这样的 Q 是 P_i 的线性组合, 其中 $i < n$.

17-7 对于所有 $n, P_n - tP_{n-1}$ 是阶数小于 n 的多项式的, 故

$$(tP_{n-1}|P_n) = (P_n|P_n).$$

17-8 E_p 的数量积的定义表明, 对于所有 $x, y, z \in E_p$, 有

$$(xy|z) = (xy\overline{z}|1) = (x|\overline{y}z).$$

命题 17-9 *所有多项式 P_n 在 I 的内部有 n 个不同的实根.*

证明 P_n 和 P_0 的正交性蕴涵

$$\int_I P_n(t)p(t)dt = 0.$$

故 P_n 至少在 I 的一个内点改变符号一次. 更一般地, 设 $(t_1, t_2, \cdots, t_r)$ 是 P_n 在 I 内部的根的序列, 其中 $t_i < t_{i+1}$, 在每个点 t_i, P_n 改变符号. 我们要证明 $r = n$. 由于显然有 $r \leqslant n$, 只需排除 $r < n$:

如果令 $Q(t) = (t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_r)$, 多项式 P_nQ 在 I 上保持符号不变, 故 $(P_n|Q) \neq 0$; 注 17-6 表明在有不等式 $r < n$ 时这是不可能的. □

命题 17-10 (递推关系) *存在实数的两个序列 λ_n, μ_n, 其中 $\mu_n > 0$, 使得对于所有 $n \geqslant 2$ 有*

$$P_n = (t + \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}.$$

证明 由于 $(P_n - tP_{n-1})$ 的阶数小于等于 $(n-1)$, 可以写出

$$P_n - tP_{n-1} = \sum_{i \leqslant n-1} c_i P_i.$$

于是对于所有 $i \leqslant (n-1)$ 有

$$-(tP_{n-1}|P_i) = c_i(P_i|P_i). \tag{1}$$

而根据注 17-8, $(tP_{n-1}|P_i) = (P_{n-1}|tP_i)$; 故如果 $i + 1 < n - 1$, 即 $i < (n-2)$, 这个数量积是零; 于是除去 $i = (n-2)$ 和 $(n-1)$, 有 $c_i = 0$.

对于 $i = (n-2)$, 注 17-7 表明

$$-(P_{n-1}|P_{n-1}) = c_{n-2}(P_{n-2}|P_{n-2}).$$

于是 $c_{n-2}<0$.

对于 $i=(n-1)$, 关系 (1) 仅表明 c_{n-1} 是实数. □

注 多项式 $p_n=\lambda_n P_n$ 之间的递推关系显然有类似的形式, 不过稍微复杂一点:

$$p_n=(u_n t+v_n)p_{n-1}+w_n p_{n-2}.$$

V. 习 题

说明: 较难的习题都打上了星号.

一般拓扑向量空间

1° 设 E 是一个拓扑向量空间, 而 $X,Y\subset E$; 证明下列性质:

a) 如果 X 是开集, 则 $X+Y$ 也是开集;

b) 如果 X 和 Y 是紧致的, 而 E 是分离的, 则 $X+Y$ 是紧致的.

通过在 $\mathbb{R}^2$ 里构造一个例子证明, 有可能 X 和 Y 是闭的, 但 $X+Y$ 不是闭的.

2° 给 $\mathbb{R}$ 上的连续函数的空间 $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 赋以由距离

$$d(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|$$

定义的一致收敛拓扑.

证明这个拓扑虽然同 $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 的群结构是相容的, 但是同它的向量空间的结构不是相容的.

*3° 对于所有 $\varepsilon>0$ 和所有 $x\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, 我们说 ε 是关联于 x 的, 如果使得 $|x(t)|\geqslant\varepsilon$ 的点 $t\in[0,1]$ 的集合可以被长度之和小于等于 ε 的有限个区间的族所覆盖; 令

$$p(x)=(\text{关联于 } x \text{ 的 } \varepsilon \text{ 的下确界}).$$

a) 证明 p 不是 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 上的范数, 但是满足 $p(x)=p(-x)$ 和 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$. 由此推导出如果令 $d(x,y)=p(x-y)$, 则 d 是这个空间上的一个距离.

b) 证明对于关联于这个距离的所有中心为 O 半径为 $\rho>0$ 的球 B, B 的凸包络是整个空间.

c) 证明关联于这个距离的拓扑同 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 的向量空间的结构是相容的, 但它不是局部凸的.

d) 证明在这个空间上的唯一的连续线性型是线性型 O.

4° 对于所有的数 $\varepsilon > 0$ 和所有 $x \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, 我们说 ε 是关联于 x 的, 如果使得 $|x(t)| \geqslant \varepsilon$ 的点 $t \in [0,1]$ 的集合包含于一个长度小于等于 ε 的区间里; 令

$$q(x) = (\text{关联于 } x \text{ 的 } \varepsilon \text{ 的下确界}).$$

q 是否具有跟第 3 题中的 p 类似的性质?

5° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 而 $\mathscr{V}$ 是 E 的这样的凸子集 V 的集合: V 含有 O, 并且对于 E 的所有含有 O 的直线 D, 点 O 是区间 $D \cap V$ 的内点.

我们说 E 的一个子集 X 是**开集**, 如果对于所有 $x \in X$, 存在一个 $V \in \mathscr{V}$, 使得 $x + V \subset X$.

a) 证明这些 "开集" 的集合在 E 上定义一个跟 E 的向量空间结构相容的拓扑, 并且 $\mathscr{V}$ 构成 O 对于这个拓扑的邻域基.

b) 给定 E 的一个代数基 $B = (a_i)_{i \in I}$. 证明对于所有大于 0 的数族 $(\alpha_i)_{i \in I}$, 元素 $\alpha_i a_i$ 和 $-\alpha_i a_i$ 的凸包络属于 $\mathscr{V}$, 并且这些凸包络构成 O 的邻域基.

c) 证明 E 上的所有线性型对于这个拓扑是连续的.

6° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间; 证明: 如果 E 是无限维的, 则 E 上关联于 E 上的所有线性型的弱拓扑不同于第 5 题所定义的拓扑.

7° 设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间; 在 E 上给定两个跟 E 的向量空间结构相容的拓扑, 并且分别用 $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$ 表示 O 对于每个拓扑的邻域的集合. 证明 E 的形式如 $V_1 \cap V_2$ 的集合 V, 其中 $V_1 \in \mathscr{V}_1$ 且 $V_2 \in \mathscr{V}_2$, 是 O 对于一个跟 E 的向量空间结构相容的拓扑的邻域的集合.

8° 设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的一个拓扑向量空间, 而 f 是 E 上的一个 (不恒等于零的) 线性型. 证明如果超平面 $H = f^{-1}(0)$ 是闭的, 则 f 是连续的.(首先证明存在一个 a 使得 $f(a) = 1$, 并且利用 $f^{-1}(a)$ 的补集是 O 的一个邻域这个事实.)

关联于半范数族的拓扑

9° 我们说赋以 $\mathscr{P}$ 拓扑的向量空间 E 的一个子集 X 是**有界的**, 如果所有半范数 $p \in \mathscr{P}$ 在 X 上都是有界的.

证明有界子集类对于下列运算是稳定的:

闭包, 凸包络, 在连续线性映射下的像, 有限并, 有限向量和, 有限乘积.

证明所有紧致集是有界的; 并且对于所有收敛序列 (x_n), x_n 的集合是有界的.

10° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间; 而 X 是 E 的一个凸子集, 使得

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{R}_+} kX.$$

对于所有 $x \in E$, 令

$$p(x) = \inf\{k > 0 : x \in kX\}.$$

证明 p 是正齐次的和凸的, 并且当 X 是对称的时候, p 是一个半范数; 在什么情形下, 这是一个范数? 证明

$$\{x : p(x) < 1\} \subset X \subset \{x : p(x) \leqslant 1\}.$$

11° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间, F 是 E 的一个子空间, 而 p 是从 E 到 $\mathbb{R}$ 内的一个映射, 使得对于所有 $x, y \in E$ 和所有 $\lambda \in \mathbb{R}_+$ 有:

$$p(\lambda x) = \lambda p(x); \qquad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

a) 设 f 是 E 上的一个线性型, 使得对于所有 $x \in F$ 有 $f(x) \leqslant p(x)$; 证明对于所有 $a \in E$ 和所有 $u, v \in F$ 有

$$f(u) - p(u-a) \leqslant f(a) \leqslant p(v+a) - f(v).$$

b) 更一般地, 设 f 是仅定义在 F 上的一个线性型, 使得对于所有 $x \in F$ 有 $f(x) \leqslant p(x)$.

对于所有 $a \in E$, 令

$$k_a = \sup_{u \in F} \left(f(u) - p(u-a) \right), \qquad K_a = \inf_{u \in F} \left(p(v+a) - f(v) \right).$$

证明 k_a 和 K_a 是有限的, 并且 $k_a \leqslant K_a$.

c) 保持在 b) 里的假设, 并且假定 $a \notin F$; 设 k 是任意一个属于 $[k_a, K_a]$ 的数.

对于所有 $x \in F$ 和所有 $\lambda \in \mathbb{R}$, 令

$$g(x + \lambda a) = f(x) + \lambda k.$$

证明 g 是在 E 的由 F 和 a 生成的向量子空间 F_a 上的线性型, g 在 F 上等于 f, 并且对于所有 $y \in F_a$ 有 $g(y) \leqslant p(y)$.

12° 假定 E 和 p 的定义同前一个题. 设 $\mathscr{F}$ 是二元组 (F, f) 的集合, 其中 F 是 E 的向量子空间, 而 f 是 F 上的一个线性型, 使得在 F 上有 $f \leqslant p$. 我们说

$$(F_1, f_1) \leqslant (F_2, f_2),$$

或说 (F_2, f_2) 是 (F_1, f_1) 的延拓, 如果 $F_1 \subset F_2$, 并且 f_1 是 f_2 在 F_1 上的限制.

a) 证明这个关系是 $\mathscr{F}$ 上的次序关系, 并且如此定义次序的 $\mathscr{F}$ 是归纳的 (参见 16-9).

b) 从前一个题推导出 $\mathscr{F}$ 的最大元有形式 (E, f).

13° 设 $E, p, \mathscr{F}$ 的定义跟上题相同.

a) 证明所有 $(F, f) \in \mathscr{F}$ 具有一个延拓 (E, g). 由此证明总存在 E 上的一个线性型 f, 使得在 E 上有 $f \leqslant p$.

b) 沿用前面的记号, 证明 (F, f) 有唯一延拓 (E, g) 的必要和充分的条件是: 对于所有 $a \in E$, 有 $k_a = K_a$.

(这个题目的断言构成 Hahn-Banach 定理, 它在分析中的应用是多方面的.)

14° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个赋以了分离的 $\mathscr{P}$ 拓扑的向量空间.

利用 13 题证明: 对于 E 的所有 $x \neq 0$, 存在一个在 E 内连续的线性型 f, 使得 $f(x) \neq 0$.

15° 证明 $\mathbb{R}$ 上的所有赋范空间 E 的范数是形式如 $|l|$ 的半范数的一个族的上包络, 其中 $l \in E'$ (利用第 13 题).

由此推导出如果 $\mathscr{P}$ 是向量空间 E 的半范数的一个无穷族, 而 $\overline{\mathscr{P}}$ 是作为 $\mathscr{P}$ 的子族的上包络的 E 上的半范数的族, 关联于 $\mathscr{P}$ 和 $\overline{\mathscr{P}}$ 的 E 上的拓扑一般是不同的.

指出这些拓扑是相等的几个情形.

16° 设 B 是 $\mathbb{R}$ 上的一个赋范空间 E 的单位闭球. 证明对于所有使得 $\|x\| = 1$ 的 $x \in E$, 存在 E 上的一个线性型 f, 使得 $\|f\| = 1$ 并且 $f(x) = 1$ (利用 13 题).

17° 设 E, F 是 $\mathbb{K}$ 上的两个向量空间, 而 f 是 $E \times F$ 上的一个双线性型. 我们说 f 使 E, F **成为对偶**, 如果

a) 对于 E 内的所有 $x \neq \mathrm{O}$, 存在 $y \in F$, 使得 $f(x, y) \neq 0$;

b) 对于 F 内所有 $y \neq \mathrm{O}$, 存在 $x \in E$, 使得 $f(x, y) \neq 0$.

我们称关联于线性型 $l_y : x \to f(x, y)$ (其中 $y \in F$) 的族的弱拓扑为关联于 f 的 E 上的弱拓扑.

证明这个拓扑是分离的, 并且如果 E 是无穷维的, 则这个拓扑不能用范数定义 (为此证明 O 的所有邻域包含余维数有限的 E 的一个向量子空间).

证明: E 上的所有线性型 l, 如果对于刚定义的弱拓扑是连续的, 必定有形式 l_y.

18° 设 D 是 $\mathbb{C}$ 的开圆盘 $\{z : |z| < 3\}$, 而 K 是紧致集 $\{z : |z| \leqslant 1\}$. 对于所有 $f \in \mathscr{H}(D)$(参见 3-7), 令

$$p(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

a) 证明 p 是 $\mathscr{H}(D)$ 上的范数;

b) 证明由 p 在 $\mathscr{H}(D)$ 上定义的拓扑不同于在所有紧致集上一致收敛的拓扑 (利用由 $f_n(z) = e^{n(z-2)}$ 定义的函数序列 (f_n)).

19° 设 A 是 $[0,1]$ 的一个可数子集, 而 α 是从 A 到 $(0, \infty)$ 的一个映射, 使得 $\sum\limits_{t \in A} \alpha(t) < \infty$. 对于所有 $x \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, 令

$$\|f\| = \sum_{t \in A} \alpha(t) |f(t)|.$$

a) 证明 $\|f\|$ 是 $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ 的一个半范数; 在什么情形下, 这是一个范数? 它等价于一致收敛范数吗?

b) 证明这样的半范数仅当对应的集合 A 和 A' 相等并且比值 α/α' 和 α'/α 有界时才定义 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 上的同一个拓扑.

关联于范数的拓扑

20° 证明赋范空间的所有紧致子集是有界的.

21° 如果 X,Y 是一个赋范空间的两个紧致子集, 证明连接 X 的一个点和 Y 的一个点的直线段是紧致的 (利用乘积 $X \times Y$).

22° 设 E 是一个赋范空间, 而 X 和 Y 是 E 的两个子集. 证明: 如果 X 是紧致的, 而 Y 是闭的, 则 $X+Y$ 是闭的.

23° 证明在所有赋范空间里, 单位开球的闭包是单位闭球, 并且它的边界是单位球面 $\{x : \|x\| = 1\}$.

24° 设 E,F 是 $\mathbb{R}$ 上的两个赋范空间, 而 f 是从 E 到 F 内的一个映射, 使得

a) 对于所有 $x,y \in E$ 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$;

b) f 在 E 的单位球上是有界的.

证明 f 是线性的和连续的.

25° 设 X 是完备赋范空间 E 的一个闭子集. 证明: 为了 X 是紧致的, 必须且只需对于所有 $\varepsilon > 0$, 存在 X 的由半径为 ε 的球的有限族组成的一个覆盖.

推广这个性质到所有完备距离空间.

26° 设 E 是一个赋范空间.

a) 如果在 E 里, 所有绝对收敛的序列 (a_n) 是收敛的, 证明 E 是紧致的.

b) 如果在 E 里, 所有满足 $\|a_n\| \leqslant 2^{-n}$ 的序列 (a_n) 是收敛的, 证明 E 是完备的.

如何把这个断言推广到所有距离空间 E?

27° 设 E 是赋以了一个半范数 p 的向量空间. 如果 $p(x-y)=0$, 则说 $x \sim y$.

证明这个关系是 E 上的一个等价关系, 这个关系在明确的意义下跟 E 的向量结构和半范数是相容的, 并且 O 的等价类是 E 的一个向量子空间. 设 $\widetilde{E}$ 是 E 对于这个等价关系的商空间; 证明可以给它赋以唯一的一个赋范向量空间的结构, 使得从 E 到 $\widetilde{E}$ 上的映射 $x \to \widetilde{x}$ 是一个使得 $\|\widetilde{x}\| = p(x)$ 的线性映射.

我们说 $\widetilde{E}$ 是关联于 E 的赋范空间.

范数的比较

28° 对于所有 $x \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, 令

$$\|x\| = \sup(|x(t)| + |x'(t)|).$$

证明 $\|x\|$ 是一个范数; 它等价于范数 $(\sup|x(t)| + \sup|x'(t)|)$ 吗?

29° 设 E 是 $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ 的由使得 $x(0)=0$ 的 x 组成的向量子空间. 对于所有 $x \in E$, 令

$$\|x\| = \sup|x(t)+x'(t)|.$$

证明 $\|x\|$ 是 E 上的一个范数, 它等价于范数 $(\sup|x(t)|+\sup|x'(t)|)$.

30° 在 $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ 上比较下面的四个范数

$$\sup|x(t)|; \qquad \sup|x(t)| + \int_0^1 |x(t)|dt;$$

$$\sup|x(t)| + \sup|x'(t)|; \qquad \sup|x(t)| + \int_0^1 |x'(t)|dt.$$

31° 证明在 $\mathbb{K}$ 上的空间 l^1 里, 范数 $\sum|x_n|$ 和 $\sup|x_n|$ 不是等价的.

32° 对于所有 $x \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, 由下式定义正数 $p(x)$:

$$p^2(x) = x^2(0) + \int_0^1 x'^2(t)dt.$$

证明 p 是一个范数, 并且对于这个范数的收敛性蕴涵一致收敛性.

范数和凸函数

33° 设 E 是一个赋范空间, 而 S 是 E 的单位球面 $\{x : \|x\|=1\}$. 假定对于所有 $x, y \in S$, 有

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \varphi(\|x-y\|),$$

其中 φ 是从 $[0,\infty)$ 到 $\mathbb{R}_+$ 内的一个递增映射, 满足条件: 对于所有 $u>0$ 有 $\varphi(u)>0$.

证明对于所有完备凸集 $X \subset E$, E 的所有点 x 在 X 上有唯一的投影.

34° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间. 称空间 $E_c = E \times E$ 为 E 的**复化空间**, 如果给 E_c 赋以通常的加法, 并且 E_c 的元素 (u,v) 跟 $\mathbb{C}$ 的元素 $(\alpha+i\beta)$ 的乘法的定义是

$$(\alpha+i\beta)(u,v) = (\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v).$$

a) 证明 E_c 是 $\mathbb{C}$ 上的一个向量空间, 并且如果通过把 E 的元素 u 等同于 E_c 的 (u,O) 把 E 嵌入到 E_c, 则 E_c 的子集 E 生成 E_c.

b) 如果 E 是赋范的, 证明一般地可以用多个方式把 E 的范数延拓成 $\mathbb{C}$ 上的向量空间 E_c 上的范数; 还要证明这些不同的 E_c 上的范数是等价的. 证明 E 和 E_c 同时是完备的或不完备的.

c) 如果 E 是一个实准 Hilbert 空间, 证明它的数量积可以通过唯一的方式延拓为 E_c 上的一个数量积, 给出它的表达式.

35° 设 E 是 $\mathbb{C}$ 上的一个向量空间; 我们称从 $E\times E$ 到 $\mathbb{R}_+$ 内的所有映射 q 为 E 上的 **次数量积**, 如果它满足关系:

1) $q(x,y)=q(y,x)$;
2) $q(\lambda x,y)=|\lambda|q(x,y)$
3) $q(u+v,y)\leqslant q(u,y)+q(v,y)$;
4) $q^2(x,y)\leqslant q(x,x)q(y,y)$.

a) 证明 $(q(x,x))^{1/2}$ 是 E 上的一个半范数.

b) 证明次数量积的所有和, 所有极限, 所有上包络是一个次数量积.

c) 证明如果 $(x|y)$ 是 E 上的一个数量积, 则它的绝对值是一个次数量积.

36° 设 E,F 是 $\mathbb{R}$ 上的两个向量空间; 而 A 是 $E\times F$ 的一个凸子集, f 是 A 上的一个凸函数.

用 X 表示 A 在 E 上的投影, 并且对于所有 $x\in E$, 令

$$g(x)=\inf_{(x,y)\in A} f(x,y).$$

证明当 g 在 X 上是有限的时候, g 是凸的.

37° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个赋范空间.

a) 证明从 E 到 $\mathbb{R}$ 内的映射 $x\to\|x\|$ 是凸的和比为 1 的 Lipschitz 的.

b) 证明从 $E\times E$ 到 $\mathbb{R}$ 内的映射 $(x,y)\to\|x-y\|$ 是凸的和 Lipschitz 的.

对于 E 的所有非空子集 A 和所有 $x\in E$, 现在令

$$d_A(x)=\inf_{y\in A}\|x-y\|;\qquad D_A(x)=\sup_{y\in A}\|x-y\|.$$

c) 证明: 如果 A 是有界的, 则 D_A 是一个凸函数并且是比为 1 的 Lipschitz 的.

d) 以下假定 A 是凸的; 证明 d_A 是凸的 (利用 36 题).

e) 令 $A'=\complement A$, 用 f 表示如下定义的函数:

$$\text{对于 } x\in A', f(x)=d_A(x);\qquad \text{对于 } x\in A, f(x)=-d_{A'}(x).$$

证明 f 在 E 内是凸的.

38° 用 E 表示赋以了一致收敛范数的向量空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

a) 证明对于所有使得 $a\leqslant b$ 的 $a,b\in E$, 满足关系 $a\leqslant x\leqslant b$ 的 $x\in E$ 的集合是 E 的一个有界闭凸集.

b) 对于所有整数 $n>0$, 用 X_n 表示使得

$$x(0)=0;\qquad \text{在 } [0,1/n] \text{ 上}, 0\leqslant x(t)\leqslant 1,\qquad \text{在 } [1/n,1] \text{ 上}, x(t)=0$$

成立的 $x\in E$ 的集合.

证明 (X_n) 是 E 的有界闭凸集的递减序列, 并且它们的交集是空的.

39° 重新设 E 是上一个题中定义的空间; 而 X 是这样的 $x \in E$ 的集合, $x \geqslant 0$, 递减的, 并且满足关系

$$1 \leqslant x(0) \leqslant 2 \quad \text{和} \quad \int_0^1 x(t)dt = x(0) - 1.$$

a) 证明 X 是 E 的有界闭凸集, 并且 $d(\mathrm{O}, X) = 1$.

b) 证明不存在任何 $x \in X$, 使得 $d(\mathrm{O}, x) = 1$.

赋范空间上的线性型

40° 设 E 是赋以了平均收敛范数的空间 $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$.

a) 设 $\varphi \in E$ 是连续的, 证明在 E 里的线性型 $x \to \int_0^1 \varphi(t)x(t)dt$ 是连续的. 求它的范数.

b) 反之, 设 $\varphi(t) = t^{-1/2}$, 证明这个线性型不是连续的.

c) 证明在 E 里使得 $\int_0^1 x(t)dt = 0$ 的 x 构成一个超平面.

d) 证明在 E 里单项式 t^n 的集合是完全的.

e) 证明在 E 里二次型 $x \to \int_0^1 x^2(t)dt$ 不是连续的.

41° 证明在赋以了一致收敛范数的 $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ 里, 线性型 $x \to x'(0)$ 不是连续的.

42° 在赋以了一致收敛范数的空间 $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ 里, 设 E 是使得 $\int_0^1 x(t)dt = 0$ 的 x 的集合.

证明所有 $u \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ 具有唯一一个属于 E 的原函数; 把它记做 T_u.

证明 T 是线性的, 并且计算它的范数.

43° 用 E 表示赋以了一致收敛范数的向量空间 $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$.

设 (t_n) 是 $[0,1]$ 的点的一个处处稠密的序列; 对于所有 $x \in E$, 令

$$l(x) = \sum_n (-2)^{-n} x(t_n).$$

a) 证明 l 是 E 上的一个线性型.

b) 证明 l 在 E 的单位闭球的任何点都达不到它的上确界.

44° 设 X 是一个紧致空间, 而 $\mathscr{M}(X)$ 是赋以了一致收敛范数的向量空间 $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 的拓扑对偶空间.

a) 证明在 $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ 上的所有线性型, 如果它在函数 $x \geqslant 0$ 的集合上是正的, 则它属于 $\mathscr{M}(X)$.

b) 设 (a_n) 是 X 的点的一个序列, 而 (α_n) 是使得 $\sum |\alpha_n| < \infty$ 的实数的序列; 对于所有 $x \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$, 令

$$\mu(x) = \sum \alpha_n x(a_n).$$

证明 μ 是 $\mathscr{M}(X)$ 的一个元素, 并且证明它的范数等于 $\sum|\alpha_n|$.

45° 假定 $X=[0,1]$; 分别用 μ 和 μ_n 表示线性型

$$\mu(x)=\int_0^1 x(t)dt; \qquad \mu_n(x)=\frac{1}{n}\sum_1^n x\left(\frac{p}{n}\right).$$

a) 计算 μ,μ_n 和 $(\mu-\mu_n)$ 的范数.

b) 证明在 $\mathscr{M}(X)$ 里序列 μ_n 在范数意义下不收敛到 μ, 但是对于 $\mathscr{M}(X)$ 的弱拓扑 (参见 3-11) 收敛到 μ.

拓扑对偶空间和二次对偶空间

46° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个赋范空间, 而 F 是 E 的向量子空间, f 是 F 上的一个连续线性型.

利用关系 $|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|$ 和 13 题证明存在 E 上的线性型 g, 它是 f 的延拓, 并且 $\|g\|=\|f\|$.

47° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个赋范空间. 从上题推导出, 对于所有 $x\in E$, 存在 $l\in E'$, 使得

$$\|l\|=1, \quad 并且 \quad l(x)=\|x\|.$$

48° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个赋范空间, 而 E' 是它的拓扑对偶空间, E'' 是 E' 的拓扑对偶空间 (称为 E 的**二次对偶空间**).

a) 对于所有 $x\in E$, 用 φ_x 表示 E' 上的线性型 $l\to l(x)$, 证明 $\varphi_x\in E''$, 并且 $\|\varphi_x\|\leqslant\|x\|$.

b) 利用前一个题证明 $\|\varphi_x\|=\|x\|$, 并且从 E 到 E'' 的线性映射 φ 是一个等距.

c) 由此推导出 $\mathbb{R}$ 上的所有赋范空间可以嵌入在一个完备赋范空间里; 把这个结果推广到 $\mathbb{C}$ 上的赋范空间.

d) 利用赋以了一致收敛范数的空间 $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, 证明即使 E 是完备的, E'' 一般包含不属于 E (这里等同于 $\varphi(E)$) 的点.

*49° 设 E 是一个赋范空间, 而 A 是 E 的一个凸子集.

a) 如果 A 在 E 里对于 E 的弱化拓扑是处处稠密的, 证明它对于关联于范数的拓扑也是如此 (可以利用 13 题).

b) 反之, 证明在所有无穷维的赋范空间 E 里, 单位球的补集 A 对于 E 的弱化拓扑是处处稠密的.

紧致线性映射

50° 设 f 是从一个赋范空间 E 到另一个赋范空间 F 的线性映射; 如果对于所有有界子集 $X\subset E$, $\overline{f(X)}$ 是紧致的, 则说 f 是**紧致的**.

a) 证明为了 f 是紧致的, 必须且只需 $\overline{f(B)}$ 是紧致的 (这里 B 是 E 的单位闭球).

b) 证明所有紧致线性映射是连续的, 但其逆是错误的.

c) 证明使得 $f(E)$ 是有限维的所有 $f \in \mathscr{L}(E,F)$ 是紧致的.

d) 证明如果 E 是有限维的, 则 f 是紧致的.

e) 证明如果 f 和 g 是紧致的, 则 $(f+g)$ 也如此. 由此推导出从 E 到 F 内的紧致线性映射的集合 $C(E,F)$ 是 $\mathscr{L}(E,F)$ 里的向量子空间.

*f) 利用 25 题证明, 如果 F 是完备的, 则 $C(E,F)$ 在 $\mathscr{L}(E,F)$ 里是闭的.

51° 设 E,F,G 是三个赋范空间, 而 $f \in \mathscr{L}(E,F)$,$g \in \mathscr{L}(F,G)$.

证明如果 f,g 中的一个映射是紧致的, 则 $f \circ g$ 也是紧致的.

52° 设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的一个赋范空间, 而 $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathscr{L}(E)$. 用 E_λ 表示使得 $f(x)=\lambda x, \lambda \neq 0$ 的 $x \in E$ 的集合.

证明 E_λ 是 E 的一个闭向量子空间.

证明当 f 是紧致的时候, E_λ 是有限维的 (利用定理 7-6).

53° 用 E 表示赋以了一致收敛范数的空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$; 给定 $K \in \mathscr{C}([0,1]^2,\mathbb{C})$, 用 T 表示从 E 到自身的由

$$(Tx)(t) = \int_0^1 K(t,u)x(u)du$$

定义的线性映射.

a) 验证 $Tx \in E$, 继而证明 T 是连续的, 并且计算它的范数, 或至少计算范数的一个上界.

b) 证明当 K 是多项式时, $T(E)$ 是有限维的. 利用 Stone-Weierstrass 定理和 50 题, 由此推导出对于所有 K, T 是紧致的.

54° 当 E 赋以平均 (或阶 $p \geqslant 1$ 的平均) 收敛范数时, 解答同样的问题.

55° 设 (k_n) 是数值的有界序列, 而 T 是从赋范空间 l^p 到自身的映射, 其定义是: 对于所有 $x=(x_n)$, $T(x)$ 是点 $(k_n x_n)$.

证明 T 是紧致映射的必要且充分的条件是序列 (k_n) 以 0 作为极限.

56° 设 E 是赋以了一致收敛范数的空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$; 而 T 是从 E 到自身的映射, 其定义是

$$Tx(t) = \int_0^t x(u)du.$$

a) 证明 T^n 可以用下列形式的关系定义:

$$T^n x(t) = \int_0^1 K_n(t,u)x(u)du,$$

其中 $K_n(t,u)$ 是 $(t,u) \in [0,1]^2$ 的连续函数.

b) 计算 T^n 在 $\mathscr{L}(E)$ 里的范数; 证明 T^n 的族在 $\mathscr{L}(E)$ 里是可和的, 并且计算它的和.

c) 利用这些结果解方程

$$(I-T)x=g,$$

其中 g 是 E 的一个给定元素, I 是 E 的恒等映射, 而 x 是未知函数.

57° 更一般地, 设 X 是一个紧致空间; 而 E 赋以了一致收敛范数的空间 $\mathscr{L}(X,\mathbb{R})$, T 是从 E 到 E 内的一个线性映射.

a) 证明如果对于所有 $x\geqslant 0$ 有 $Tx\geqslant 0$, 则 T 是连续的.

此外以下还假定对于所有整数 n 有

$$Tu+T^2u+\cdots+T^nu\leqslant ku,$$

其中 $k\geqslant 0$ 是一个常数, 而 u 是 E 的单位元 (对于所有 $t\in X$,$u(t)=1$).

b) 证明对于所有 t,

$$\lim_{n\to\infty}(T^nu(t))=0,$$

并且对于所有整数 $p,q\geqslant 1$,$T^{p+q}u\leqslant kT^pu$.

由此推导出 (T^nu) 的序列一致收敛到 0 (利用第一章习题的 86 题).

c) 证明对于所有 $x\in E$ 有 $\|T^nx\|\leqslant A\|x\|\lambda^n$, 其中 A 和 λ 是正的常数, 并且 $\lambda<1$.

d) 由此推导出映射 $x\to x-Tx$ 是从 E 到 E 上的一个同构, 并且给出不等式 $x\geqslant Tx$ 的一般解.

完备赋范空间

58° 设 E 是 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 的由有界变差并且满足条件 $x(0)=0$ 的 x 的连续函数组成的子集; 对于所有 $x\in E$, 用 $p(x)$ 表示 x 在 $[0,1]$ 上的全变差.

a) 证明 E 是一个向量空间, 并且 p 是这个空间上的一个范数.

b) 证明 p 在赋以了一致收敛范数的 E 上不是连续的, 而仅仅是下半连续的.

c) 证明赋以了范数 p 的 E 是一个完备赋范空间.

*59° 给定一个数 $p\geqslant 1$, 对于所有 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 用 $\|f\|$ 表示如下定义的有限或无限的非负数:

$$\|f\|^p=\limsup_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|f(t)|^p dt.$$

再用 B_p 表示 $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 的由使得 $\|f\|<\infty$ 的 f 组成的子集.

a) 证明 B_p 是 $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 的一个向量子空间, 并且 $\|f\|$ 是 B_p 上的一个半范数; 通过举例证明它不是一个范数.

b) 对于所有 $u \in \mathbb{R}$ 和所有 $f \in B_p$, 用 f_u 表示由 $f_u(x) = f(x-u)$ 定义的函数. 证明 $\|f_u\| = \|f\|$.

c) 证明集合

$$S_p = \left\{ f \in B_p : \|f\|^p = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |f(t)|^p dt \right\}$$

是 B_p 内的闭集.

d) 用 $\mathscr{B}_p$ 表示关联于 B_p 的赋范空间 (见 27 题), 称它为指数为 p 的 Besicovitch **空间**. 证明这个赋范空间是完备的.

*60° 设 E, F 是两个赋范空间, 第一个是完备的, 又设 A 是 $\mathscr{L}(E,F)$ 的这样的子集, 对于所有 $x \in E$, 集合 $\{f(x) : f \in A\}$ 是有界的.

设 φ 是从 E 到 $\mathbb{R}_+$ 内的映射, 其定义是

$$\varphi(x) = \sup_{f\in A} \|f(x)\|.$$

a) 证明 φ 是下半连续的和凸的.

b) 由 φ 的半连续性和 E 是完备空间的事实推导出存在 E 的一个非空开集, 使得在这个开集上 φ 是有上界的 (利用第一章习题的 102, 103, 104 题).

c) 由此推导出 A 是 $\mathscr{L}(E,F)$ 的一个有界子集.

61° 设 E, F 是两个赋范空间, 第一个是完备的, 而 f_n 是 $\mathscr{L}(E,F)$ 的元素的一个这样的序列, 对于所有 $x \in E$, 序列 $(f_n(x))$ 有一个极限 $f(x)$.

利用前一个题证明 $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

*62° 设 E, F 是两个赋范空间, 第一个是完备的, f 是从 E 到 F 内的线性映射.

假定存在 E 的一个子集 A, 其补集是 E 的可数个无处稠密集的并集, 并且 f 在 A 的限制是连续的 (我们指出在分析中可以明确定义的所有的 f 都具有这个性质).

a) 证明存在 A 的一个含有 O 的平移 $A' = A + a$ 具有跟 A 同样的性质; 再证明存在一个中心为 O 的开球 B, 使得对于所有 $x \in (A' \cap B)$ 有 $\|f(x)\| \leqslant 1$.

b) 利用第一章习题的 102,103,104 题证明

$$B \subset \frac{1}{2}[(A' \cap B) + (A' \cap B)]$$

由此推导出 f 是连续的.

可分赋范空间

我们回忆以下定义: 称所有包含一个处处稠密的有限或可数子集的距离空间是**可分的**.

63° a) 证明为了一个赋范空间是可分的, 必须且只需它包含一个有限或可分的完全子集.

b) 由 a) 推导出每个空间 $\mathscr{C}^p([0,1],\mathbb{K})$ 是可分的.

c) 回答对于赋以了 p (其中 $p \geqslant 1$) 阶平均收敛范数的空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$ 的同样的问题.

d) 证明 l_I^p 是可分空间的必要且充分的条件是 I 是有限的或可分的.

64° 设 E 是赋以了满足条件 $p \leqslant kq$ 的两个范数 p, q 的向量空间 (其中 k 是一个大于 0 的数).

证明: 如果赋以了范数 q 的 E 是可分的, 则赋以了范数 p 的 E 也是可分的.

*65° 设 E 是一个向量空间, 给它赋以了一个可数的代数基 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 对于所有 n 有 $\|a_n\| = 1$.

a) 证明对于大于 0 的所有满足条件 $\sum \alpha_n < \infty$ 的序列 (α_n), 如果 $b_n = \sum\limits_0^n \alpha_i a_i$, 则序列 (b_n) 是一个 Cauchy 序列.

b) 对于所有 $n > 0$, 用 d_n 表示 a_n 到由 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 生成的向量空间的距离; 再用归纳法通过下列条件定义序列 (α_n):

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1; \qquad \alpha_{n+1} = 3^{-1}\alpha_n d_n.$$

证明关联于序列 (α_n) 的 Cauchy 序列 (b_n) 在 E 里不收敛.

c) 由此推导出任何无穷维 Banach 空间都没有可数的代数基.

66° 用 E 表示复数的有界序列 $x = (x_n)$ 的向量空间, 给它赋以范数 $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$.

a) 仅有限个元素非零的序列 $x = (x_n)$ 的向量空间在 E 里的闭包 E_0 是什么?

b) 使得 $\sum |x_n| < \infty$ 的序列 $x = (x_n)$ 的向量空间在 E 里的闭包是什么?

c) 证明使得 $\sum |x_n| \leqslant 1$ 的序列 $x = (x_n)$ 的集合在 E 里是闭的.

d) 证明 E 不是可分的, 但反之 E_0 是可分的.

e) 证明由使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在的序列 $x = (x_n)$ 组成的 E 的向量子空间是完备的和可分的.

67° a) 证明对于任意不同的实数 λ, μ, 如果令

$$f(t) = e^{i\lambda t} - e^{i\mu t},$$

则 59 题定义的 B_p 的元素 f 的范数大于等于 1.

b) 由此推导出关联于 B_p 的赋范空间 $\mathscr{B}_p$ 不是可分的 (利用函数 $e^{i\lambda t}$ 的族).

非连续线性映射

68° 设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的一个向量空间, 而 $\mathscr{L}$ 是 E 的线性无关子集的集合, 用包含关系为其排序.

a) 证明 $\mathscr{L}$ 是一个归纳集.

b) 证明 E 的所有最大线性无关子集生成 E.

c) 由上推导出 E 包含一个代数基.

69° 设 B 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间 E 的一个代数基, 而 f 是从 B 到 $\mathbb{K}$ 内的任意一个映射.

a) 证明存在 E 上的唯一的线性型 g, 使得对于所有 $x \in B$ 有 $g(x) = f(x)$.

b) 现在假定 E 是一个无限维的赋范空间; 设 (a_n) 是 B 的不同点的一个无穷序列. 用 f 表示 B 上如下定义的函数:

$$\text{对于所有 } n, f(a_n) = n\|a_n\|; \qquad \text{如果 } x \text{ 不是一个 } a_n, f(x) = 0.$$

证明关联于 f 的线性型 g 不是连续的.

c) 利用同一想法, 证明在无穷维赋范空间上的间断线性型的集合的势至少等于连续线性型集合的势.

赋范空间的乘积和直和

70° 设 E 是一个赋范空间, 而 A, B 是 E 的两个向量子空间, 使得 E 是它们的代数直和 (即 $A + B = E$, 并且 $A \cap B = \{O\}$).

对于所有 $x \in E$, 用 x_A, x_B 表示 x 在 A 里和 B 里的分量.

a) 证明: 如果映射 $x \to x_A$ 是连续的, 则映射 $x \to x_B$ 亦然, 并且 A 和 B 在 E 里是闭的.

b) 证明这时从赋范空间 $A \times B$ 到 E 里的映射 $(u, v) \to (u + v)$ 是一个同构, 并且如果 A 和 B 是完备的, 则 E 也如此.

c) 证明 x_A 的连续性还可以表达为: A 和 B 的单位球的距离不等于 0.

*71° 设 E 是赋以了一致收敛范数的空间 $\mathscr{C}([0, \pi], \mathbb{R})$. 而 E_1 (对应地, E_2) 是由 1 和 $\cos n!t$ (对应地, $x^n/n + \cos n!t$) (其中 $n \in \mathbb{N}^*$) 生成的 E 的子空间的闭包.

a) 证明 $E_1 \cap E_2 = \{O\}$.

b) 证明 $(E_1 + E_2)$ 不同于 E; 由此推导出一个不完备的赋范空间可以是两个完备向量子空间的代数直和.

有限维赋范空间

72° 设 E_p 是复系数的小于等于 p 阶的多项式 $P(X)$ 的向量空间.

设 $z_0, z_1, \cdots, z_p$ 是 $\mathbb{C}$ 的不同的点, 令

$$\|P\| = |P(z_0)| + |P(z_1)| + \cdots + |P(z_p)|.$$

证明 $\|P\|$ 是 E_p 上的一个范数, 并且当改变点 z_i 时所得到的各个范数是等价的.

如果 $P'(z) = zP(z)$, 从 E_p 到 E_{p+1} 的映射 $P \to P'$ 连续吗?

73° 证明: 如果在赋范空间 E 里存在一个其内部非空的紧致集合, 则 E 是有限维的.

*74° 证明: 在 $\mathbb{R}$ 上的所有 n 维赋范间 E 里, 存在 E 的一个基 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 使得如果用 (x_i) 表示 x 在这个基里的坐标, 则有

$$\sum |x_i| \leqslant \|x\| \leqslant n \sum |x_i|.$$

(建议利用函数: $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的行列式, 并且在所有 b_i 的范数为 1 的条件下求它的最大值.)

至少对于 $n = 2$, 证明在上面的不等式里常数 n 不能用更小的其他的数代替.

75° 研究跟前一个类似的问题, 其中 $\sum |x_i|$ 用 $(\sum |x_i|^2)^{1/2}$ 代替, 而 n 用另一个常数代替.

**76° 证明在 84 题中承认而没有证明的性质.

实数或复数的可和族

77° 设 (ω_i) 是 $[0,1]$ 的子区间的一个族; 用 a_i 表示 ω_i 的长度.

证明: 如果 $\sum a_i < 1$, 则族 (ω_i) 不能覆盖 $[0,1]$.

更精确地, 证明 ω_i 的并集在 $[0,1]$ 里的补集不可能是有限的或可数的.

(首先仔细研究有限族的情形, 然后适当利用 Heine-Borel-Lebesgue 定理过渡到一般情形.)

78° 构造一个实数序列 $(a_{p,q})$ (其中 $p, q \in \mathbb{N}$), 使得

a) $a_{p,q} = a_{q,p}$;

b) 对于所有 p, 族 $(a_{p,q})_{q \in \mathbb{N}}$ 是可和的, 并且其和为 0;

c) $a_{p,q}$ 的族不是可和的.

*79° 设 (a_n) 是复数的一个序列, 使得 $\sum |a_n|^2 < \infty$; 证明一般项为 $a_p a_q/(p+q)$ (其中 $p, q \geqslant 1$) 的族是可和的.

80° 设 $x \in \mathbb{C}$ 满足 $|x| < 1$; 证明等式:

$$\sum_1^\infty \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_1^\infty \frac{x^n}{1-x^{2n}}; \qquad \sum_1^\infty \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_1^\infty \frac{x^n}{(1-x^n)^2}.$$

拓扑群和赋范空间上的可和族

81° a) 设 G 是任意一个拓扑群, 而 A 是 G 的一个子集. 证明 $\overline{A}$ 是诸 $A \cdot V$ (和 $V \cdot A$) 的交集, 其中 V 取遍 G 的单位元 e 的对称邻域的集合 $\mathscr{V}$ (利用以下事实: e 的对称邻域构成 $\mathscr{V}$ 的一个基).

b) 由 a) 推导出 e 的闭邻域构成 $\mathscr{V}$ 的一个基.

82° 设 E 是一个赋范空间, I 是一个指标集, 而 p 是一个大于等于 1 的实数.

用 $l_I^p(E)$ 表示 $\mathscr{F}(I,E)$ 的由使得 $\sum_i \|a_i\|^p < \infty$ 的 E 的元素 $a = (a_i)_{i\in I}$ 构成的子集.

a) 证明 $l_I^p(E)$ 是 $\mathscr{F}(I,E)$ 的一个向量子空间, 并且 $\left(\sum\limits_i \|a_i\|^p\right)^{1/p}$ 是这个空间上的一个范数.

b) 如果 E 是完备的, 证明 $l_I^p(E)$ 也是完备的, 并且其逆命题亦真.

c) 假定 E 是一个赋范代数, 给 $l_I^p(E)$ 赋以如下定义的乘法:

$$\text{如果 } a = (a_i) \text{ 而 } b = (b_i), \text{ 则点 } c = a \cdot b \text{ 是点 } (a_i b_i).$$

验证这个乘法必然有意义, 并且它使得 $l_I^p(E)$ 成为一个赋范代数.

83° 设 E 是一个完备赋范空间, 而 $(a_i(n))_{i\in I}$ 是 E 的元素族的一个序列, 使得对于所有整数 n 有 $\|a_i(n)\| \leqslant \lambda_i$, 这里正数族 (λ_i) 是可和的.

证明如果对于所有 $i \in I$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_i(n) = a_i$, 则族 (a_i) 是可和的, 并且和 $s_n = \sum\limits_i a_i(n)$ 收敛到 $s = \sum\limits_i a_i$.

把这个结果推广到以下情形: 用依赖于参数 $\lambda \in L$ 的族 $(a_i(\lambda))$ 代替族 $(a_i(n))$, 并且对于所有 i, $a_i(\lambda)$ 沿 L 上的一个滤子基 $\mathscr{B}$ 收敛到 a_i.

*84° 这里承认以下性质:

存在大于 0 的数的一个收敛到 0 的序列 (α_n), 使得对于所有 $n \geqslant 1$, 和 $\mathbb{R}$ 上的所有 n 维赋范空间 E, 存在 E 里的 n 个范数为 1 的这样的向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得 a_i 的部分和的范数小于等于 $n\alpha_n$.

利用这个性质和 95 题证明: 在所有无穷维赋范空间 E 里, 存在 E 的元素的一个序列 (b_n), 使得这个序列是可和的, 但不是绝对可和的.

*85° 考虑从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的这样的映射 f, 使得对于实数的所有可和族 (a_i),$f(a_i)$ 的族也是可和的.

a) 证明用以下性质刻画这类 f 的特征: f 在点 0 的一个领域中是 Lipschitz 映射. (参见 99 题.)

b) 把这个结果推广到从一个有限维向量空间到另一个的映射.

c) 可以把 a) 的结果推广到无穷维赋范空间吗?

86° 设 $(a_i)_{i\in I}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间 E 的元素的一个有限族. 假定族 (a_i) 的所有有限子族的和属于 E 的一个含有 O 的一个凸子集 C.

证明对于 $[0,1]$ 的元素的所有族 $(\lambda_i)_{i\in I}$, $\lambda_i a_i$ 的族的所有有限和也属于 C.

建议利用下列方法之一:

a) 对于 I 的元素数目用归纳法证明.

b) 首先当 $E=\mathbb{R}$ 和 C 是 $\mathbb{R}$ 的一条半直线时证明所述性质; 然后当 E 是有限维时证明该性质, 这要用到下列事实: E 的所有闭凸集是仿射半空间的一个交集.

87° 设 $(a_i)_{i\in I}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个赋范空间 E 的一个元素族; 而 $(\lambda_i)_{i\in I}$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个元素族, 对于所有 i 有 $|\lambda_i|\leqslant 1$.

证明: 如果 a_i 的所有有限子族的和的范数小于等于 k, 则 $\lambda_i a_i$ 的族的所有有限子族的和的范数小于等于 $4k$ (如果 λ_i 是实数, 甚至小于等于 $2k$).

88° 设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的一个完备赋范空间, 而 $(a_i)_{i\in I}$ 是 E 的元素的一个可和族.

a) 证明对于 $\mathbb{K}$ 的元素的所有有界族 $(\lambda_i)_{i\in I}$, 族 $(\lambda_i a_i)$ 是可和的.

b) 设 $(\lambda_i)_{i\in I}$ 是从一个集合 X 到 $\mathbb{K}$ 内的一个映射族, 使得对于所有 $i\in I$ 和所有 $x\in X$ 有 $|\lambda_i(x)|\leqslant K$ (其中 $K<\infty$).

证明 $\lambda_i(x)a_i$ 的族在 X 上是一致可和的; 由此推导出: 如果 X 是一个拓扑空间, 而诸 λ_i 是连续的, 则从 X 到 E 内的映射 $x\to\sum\limits_i\lambda_i(x)a_i$ 是连续的.

*c) 利用上面的结果证明: 当设诸 λ_i 满足条件 $|\lambda_i|\leqslant 1$ 时, 和 $\sum\limits_i\lambda_i a_i$ 的集合是 E 的一个紧致凸集. (对于这个题, 利用 87 题.)

89° 设 (a_n) (其中 $n\geqslant 1$) 是赋范空间 E 的元素的一个序列, 令

$$b_{n,p}=\frac{na_n}{p(p+1)}\ (\text{其中 } 1\leqslant n\leqslant p).$$

证明族 (a_n) 和 $(b_{n,p})$ 同时是可和的 (或不可和的), 并且它们的和是相等的 (利用 86 题).

级数. 级数的比较与可和族的比较

90° 设 (a_n) 是大于等于 0 的数的一个序列, 使得 $\sum a_n=\infty$. 讨论一般项分别为:

$$a_n/(1+a_n);\qquad a_n/(1+a_n^2);\qquad a_n/(1+na_n);\qquad a_n/(1+n^2a_n)$$

的级数的收敛性.

91° 设 $(a_n),(b_n)$ 是两个收敛的正项级数; 证明级数 $(\sqrt{a_nb_n})$ 是收敛的.

92° 设 a_n,b_n 是大于 0 的数的两个序列. 证明当对于所有 n 有 $b_{n+1}/b_n\leqslant a_{n+1}/a_n$ 时, 级数 (a_n) 的收敛性蕴涵级数 (b_n) 的收敛性.

93° 设 (a_n) 是递减正数序列; 证明如果级数 (a_n) 收敛, 则序列 (na_n) 趋于 0 (考虑 $\sum\limits_n^{2n}a_i$ 的和). 其逆成立吗?

94° 设 (a_n) 是大于等于 0 的数的一个序列, 令

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

如果级数 (a_n^2) 收敛, 讨论级数 (b_n^2) 的收敛性.

95° 设 (α_n) 是大于 0 的数的一个趋于 $+\infty$ 的序列. 证明存在一个收敛正级数 (a_n) 和一个发散级数 (A_n), 使得 $A_n \leqslant \alpha_n a_n$.

$$\left(\text{取 } a_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \quad \text{和} \quad A_n = \sqrt{\alpha_n} - \sqrt{\alpha_{n-1}}\right).$$

96° 证明对于所有收敛正级数 (a_n), 存在一个趋于 $+\infty$ 的正递减序列 (α_n), 使得级数 $(\alpha_n a_n)$ 仍然收敛.

97° 证明对于所有发散正级数 (a_n), 存在一个极限为 0 的正递减序列 (α_n), 使得级数 $(\alpha_n a_n)$ 还是发散的.

98° 设 f_n 是从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 内的递增映射序列. 证明存在从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 内的递增映射 f, 使得对于所有 n 有

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/f_n(x) = +\infty.$$

由此推导出如果以商 $\varphi(p) = 1/(a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots)$ 的递增速度测量一个正级数 (a_n) 的收敛速度, 那么对于收敛正级数的所有给定的序列, 存在一个比这个序列的每个级数收敛更快的正级数.

99° 设 (λ_n) 是一个大于等于 0 的数的序列, 使得对于所有收敛正级数 (a_n), 级数 $(\lambda_n a_n)$ 是收敛的. 证明序列 (λ_n) 是有界的.

100° 设 (a_n) 是大于 0 的数的一个递减序列, 而 k 是一个大于 1 的数; 对于所有整数 $n \geqslant 1$, 把最接近 k^n 的整数记做 k_n.

证明级数 (a_n) 和 $(k_n a_{k_n})$ 同时收敛或发散.

由此推导出级数 $(n^{-\alpha})$ 和类似级数 $(n^{-1}(\operatorname{Log} n)^{-\alpha})$ 的收敛判别法.

101° 设 z_n 是实部大于等于 0 的复数的一个序列. 证明如果级数 (z_n) 和 (z_n^2) 收敛, 则级数 (z_n^2) 绝对收敛.

102° 设 f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 里的一个具有连续的二阶导数的映射, 使得 $f(0) = 0$; 而 (a_n) 是实数的一个序列.

证明如果级数 (a_n) 和 (a_n^2) 收敛, 则级数 $(f(a_n))$ 也收敛.

103° 设 (a_n) 是极限为 0 的实数的一个序列, 并且级数 (a_n^+) 和 (a_n^-) 是发散的.

证明对于所有的数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 存在 $\mathbb{N}$ 的一个置换 π, 使得级数 $(a_{\pi(n)})$ 是半收敛的, 并且其和是 λ.

*104° 探求并且证明一个涉及 $\mathbb{R}^n$ 的元素的序列 (a_n) 的类似断言 (从 $n = 2$ 开始).

105° 设 (a_n) 是赋范空间的元素的一个序列; 证明如果级数 (na_n) 收敛. 则级数 (a_n) 也收敛.

106° 研究下列级数的收敛性, 其通项分别是:

$$(-1)^n/\left(\sqrt{n} + (-1)^n\right); \quad (-1)^n/(2n + (-1)^n n); \quad (-1)^n/(n + \cos n\pi).$$

*107° 设 (λ_n) 是 $\mathbb{K}$ 的元素的一个序列; 证明下列性质的等价性:

a) 通项为 $|\lambda_n - \lambda_{n+1}|$ 的级数收敛.

b) 对于 $\mathbb{K}$ 的元素的所有收敛序列 (a_n), 级数 $(\lambda_n a_n)$ 是收敛的.

*108° 设 (a_n) 是赋范空间 E 的元素的一个序列. 证明如果级数 (a_n) 收敛, 则存在一个正数的极限为 0 的递减序列 (α_n) 和 E 的元素的一个序列 (b_n), 使得 $a_n = \alpha_n b_n$, 并且和 $(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ 的集合在 E 里是有界的.

(以上两个题涉及 Abel 判别法的逆.)

109° 设 E, F 是两个赋范空间, 而 f 是从 $E \times F$ 到一个完备赋范空间 G 的连续双线性映射. 又设 a_n (对应地, b_n) 是 E (对应地, F) 的元素的一个序列.

证明: 如果级数 (a_n) 收敛, 并且级数 $(\|b_n - b_{n+1}\|)$ 收敛, 则级数 $(f(a_n, b_n))$ 也收敛.

110° 设 (a_n) 是一个赋范空间的元素的一个序列; 令

$$s_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

证明如果级数 (a_n) 的和是 s, 则序列 $(s_1 + s_2 + \cdots + s_n)/n$ 收敛到 s.

111° 考虑从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 内的映射 f, 它使得对于所有实收敛级数 (a_n), 级数 $(f(a_n))$ 也收敛.

证明下列事实刻画 f 的特征: 存在 0 在 $\mathbb{R}$ 里的一个邻域, f 在这个邻域上是线性的.

*112° 推广前面的结果到从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 f, 再推广到从一个拓扑向量空间 E 到另一个的映射 f.

函数级数与函数可和族

113° 设 $(a_n z^n)$ 是复系数满足 $\sum |a_n| < \infty$ 的幂级数. 证明这个级数在 $\mathbb{C}$ 的圆盘 $\{z : |z| \leqslant 1\}$ 里是一致收敛的. 关于它的和能说什么?

114° 对于所有 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 令

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt;$$

设 E 是 $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 的由使得 $\|f\| < \infty$ 的 f 构成的子集.

a) 证明 E 是一个向量空间, 并且 $\|f\|$ 是 E 的一个范数.

b) 设

$$f_n(t) = (-1)^n e^{-n|t|},$$

一般项为 $f_n (n \geqslant 1)$ 的级数在 E 里收敛吗? 它在 $\mathbb{R}$ 的某个区间一致收敛吗?

115° 证明通项为 $x^2(1 + x^2)^{-(n+1)}$ 的正项级数对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 是收敛的, 并且在不含有 0 的所有紧致区间上一致收敛, 但是在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

116° 证明对于 $\mathbb{C}$ 的所有紧致集 K, 通项为 $(n^2-z^2)^{-1}$ 的级数在去掉有限项后在 K 上是一致收敛的. 对于它的和能够推导出什么?

117° 对于通项为下面给定的各个函数的每个级数, 首先确定使得级数收敛的 $x\in\mathbb{R}$ 的集合, 然后确定使得级数一致收敛的紧致集. 最后对于 $\mathbb{C}$ 研究同样的问题 (对于对数, 我们假定 $\mathrm{Log}(1+u)$ 当 $|u|<1$ 时由幂级数展开定义):

$$n^{-3/2}\cos n^2x;\quad \sin x^n;\quad \sin x/n^2;\quad 2^n\sin x/3^n;$$
$$n^{3/2}\sin x/n^3;\quad 1-\cos x/n;\quad 1/(n+x)^2;\quad x\cos(2n+1)x^2;$$
$$x^{(1+1/2+\cdots+1/n)};\quad \mathrm{Log}(1+x^n);\quad \mathrm{Log}(\cos x/n).$$

对于这些级数的和能够说什么?

*118° 设 (a_n) 是一个复数序列, 而 (λ_n) 是趋于 $+\infty$ 的实数的一个递增序列.

证明如果通项为 $a_ne^{-\lambda_nz}$(其中 $z\in\mathbb{C}$) 的级数在一个点 z_0 收敛, 则它在所有形式如

$$\{z:|\mathrm{Arg}(z-z_0)|\leqslant k<\pi/2\}$$

的一个角里一致收敛.(首先归结为 $z_0=0$ 的情形, 然后借鉴 Abel 判别法.)

119° 设 f 是从 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的下半连续映射, 利用第二章习题的 9 题证明存在一个从 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}_+$ 内的映射的序列 (a_n), 使得对于所有 x, 级数 $(a_n(x))$ 是收敛的, 并且其和是 $f(x)$.

证明如果 $f>0$, 还可以要求 a_n 是多项式.

120° 设 a_n 是 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 的元素的一个这样的序列, 对于所有 $x\in[0,1]$, 一般项为 $|a_n(x)|$ 的级数是收敛的.

证明对于所有 x, 通项为 $a_n(x)$ 的级数是收敛的, 并且如果用 $f(x)$ 表示它的和 f, 则 f 是两个下半连续函数的差.

利用上一个题, 陈述并且证明这个性质的逆.

121° 设 X 是一个集合, E 是一个完备赋范空间, (a_n) 是从 X 到 E 内的映射的一个序列, 而 (λ_n) 是从 X 到 $\mathbb{R}_+$ 内的映射的一个递减序列.

a) 稍许修改在证明命题 10-14 的证明中所做的计算, 证明: 如果令

$$k_p(x)=\sup_{q\geqslant p}\|a_p(x)+\cdots+a_q(x)\|,$$

则当序列 $\lambda_p(x)k_p(x)$ 在 X 里一致趋于 0 时, 通项为 $\lambda_n(x)a_n(x)$ 的级数在 X 里是一致收敛的.

b) 证明以上结果在下列两个特殊情形下成立:

1. 和 $(a_0(x)+\cdots+a_n(x))$ 的集合在 E 是有界的, 并且序列 $(\lambda_n(x))$ 在 X 里一致趋于 0.

2. 通项为 $a_n(x)$ 的级数在 X 里是一致收敛的, 并且 λ_0 是有界的.

122° 证明如果通项为 $a_n x^n$ (其中 $a_n \in \mathbb{C}$) 的幂级数对于 $x=1$ 是收敛的, 则它在区间 $[0,1]$ 是一致收敛的.

作为特例, 利用 $\text{Log}(1+x)$ 的经典幂级数展开, 由上推导出

$$\text{Log}2 = 1 - 1/2 + 1/3 - \cdots + (-1)^{n+1}1/n + \cdots$$

123° 证明级数 $\big((-1)^n/(2n^{1/2}+\cos x)\big)$ (其中 $n \geqslant 1$) 在 $\mathbb{R}$ 是一致收敛的, 并且它的和是连续的.

124° 证明通项为

$$x\sin nx/(2n^{1/2}+\cos x), \qquad \text{其中} \qquad n \geqslant 1$$

的级数在开区间 $(-2\pi, 2\pi)$ 的所有紧致子集上是一致收敛的. 它的和在点 2π 的邻域内的状态怎样?

125° 设 (a_n) 是一个完备赋范空间 E 的元素的一个收敛级数. 研究一般项为

$$\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)a_n; \qquad \left(\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right)a_n \qquad (\text{其中 } x \in [0,\infty)).$$

的级数的收敛性和一致收敛性.

126° 研究一般项为

$$x^{p+q}; \qquad x^{pq}; \qquad (-1)^p x^{p(2q+1)} \qquad (\text{其中 } p, q \in \mathbb{N}, \text{而 } x \in \mathbb{C})$$

的族的可和性和一致可和性.

127° 设 X, Y 是两个拓扑空间, $a \in X$, $b \in Y$, 而 (f_n) 是从 X 到 Y 内的映射的序列, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = b.$$

我们说序列 (f_n) 在点 a 是一致收敛的, 如果对于 b 在 Y 里的所有邻域 V, 存在 a 在 X 里的一个邻域 U, 和一个正数 n_0, 使得对于所有 $n \geqslant n_0$ 有 $f_n(U) \subset V$.

a) 证明如果序列 (f_n) 在 X 里简单收敛到一个映射 f, 而 b 有一个闭邻域基, 则序列 (f_n) 在 a 的一致收敛性和 f_n 在 a 的连续性蕴涵 f 在 a 的连续性.

b) 假定 Y 是一个赋范空间, 给定从 X 到 Y 内的在 a 连续的映射的一个序列 (g_n), 使得 $\sum \|g_n(x)\|$ 是处处有限的, 并且在 a 是连续的. 证明级数 (g_n) 在 a 一致收敛.

*128° 设 (f_i) 是从一个紧致拓扑空间 X 到一个有限维赋范空间 E 的一个连续映射族. 证明下列断言的等价性:

a) f_i 的族是一致可和的.

b) $\|f_i(x)\|$ 的族对于所有 $x \in X$ 是可和的, 并且它的和是 x 的连续函数.

当 X 不是紧致的时候, 证明我们仍有蕴涵 a) $\Rightarrow$ b), 但是没有蕴涵 b) $\Rightarrow$ a) (给一个例子).

复数可乘族与复数无穷乘积

129° 利用对于所有实数都成立的不等式 $1+x \leqslant e^x$, 用归纳法证明对于大于等于 0 的 (对应地, 在 $[-1,0]$ 内的) 所有有限数族 (a_i) 有

$$1+\sum a_i \leqslant \prod(1+a_i) \leqslant \exp\left(\sum a_i\right).$$

由此简单地推导出对于大于等于 (对应地, 在 $[-1,0]$ 内) 的所有数族 $(a_i)_{i\in I}$, 有族 $(1+a_i)$ 的可乘性和族 (a_i) 的可和性之间的等价性.

130° 设 (a_n) 是大于等于 0 的一个数族 (其中 $a_0>0$); 令

$$b_n = a_n/(a_0+a_1+\cdots+a_n).$$

证明级数 (a_n) 和 (b_n) 同时收敛和发散, 并且当它们收敛时有

$$\frac{a_0}{\sum a_n} = \prod_1^{\infty}(1-b_n).$$

131° 设 (a_n) 是大于等于 0 的一个数族. 证明一般项为 $a_n/(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n)$ 的级数总是收敛的, 并且其和是

$$1-\left(1/\prod_i(1+a_i)\right).$$

132° 设 $(a_i)_{i\in I}$ 是 $\mathbb{C}$ 的元素的一个可和族; 用 $\mathscr{F}$ 表示 I 的有限子集的集合. 对于所有 $K\in\mathscr{F}$, 令

$$u_K = \prod_{i\in K} a_i \qquad \text{如果 } K=\varnothing, \text{令 } u_K=1.$$

证明 u_K 的族是可和的, 并且其和等于

$$\prod_i(1+a_i).$$

133° 用 P 表示大于等于 2 的素数的集合. 由上一个题推导出对于所有的数 $s>1$, 数 $(1-p^{-s})^{-1}$ (其中 $p\in P$) 的族是可乘的, 并且其乘积是

$$\sum_0^{\infty} n^{-s}.$$

134° 用同样的方法证明对于所有使得 $|x|<1$ 的 $x\in\mathbb{C}$, $(1+x^{2^n})$ (其中 $n\in\mathbb{N}$) 的族是可乘的, 并且其积是 $1/(1-x)$.

135° 设 x 是 $\mathbb{C}$ 的使得 $|x|<1$ 的一个元素; 令

$$Q_1=\prod_1^\infty(1+x^{2n});\qquad Q_2=\prod_1^\infty(1+x^{2n-1});\qquad Q_3=\prod_1^\infty(1-x^{2n-1}).$$

证明 $Q_1Q_2Q_3=1$.

136° 设 k 是一个使得 $|k|>1$ 的复数. 对于所有 $z\in\mathbb{C}$, 令

$$P(z)=\prod_1^\infty(1+z/k^n).$$

a) 证明这个乘积是绝对收敛的, 并且

$$P(kz)=(1+z)P(z).$$

b) 对于所有 $z\neq 0$ 令

$$S(z)=P(z)P(1/z)(1+z).$$

证明 $S(kz)=kzS(z)$.

c) 设 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是非 0 的复数的两个有限序列, 使得 $a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n$; 令

$$M(z)=\frac{S(a_1z)\cdots S(a_nz)}{S(b_1z)\cdots S(b_nz)}.$$

证明 $M(z)=M(kz)$; 由此对于函数 $u\to M(e^u)$ 推导出什么?

d) 证明 P 是 z 的多项式在 $\mathbb{C}$ 的所有紧致子集上的一致极限. 对于 P 得到什么结论? 同样地研究 S 和 M.

137° 证明无穷乘积 $\prod_n(1+i/n)$ 是不收敛的, 但是绝对值 $|1+i/n|$ 的无穷乘积是收敛的.

138° 设 (u_n) 是一个复数序列, 使得

$$|u_n|\leqslant kn^{-\alpha}\qquad (\text{其中 } k>0,\alpha>0).$$

证明存在只依赖 α 的整数 p, 使得 $(1+u_n)$ 的无穷乘积的收敛性等价于一般项为

$$v_n=u_n-u_n^2/2+\cdots+(-1)^{p+1}u_n^p/p$$

的级数的收敛性.

139° 利用乘法拓扑群 $\mathbb{R}_+^*$ 同构于加法群 $\mathbb{R}$ 这个事实, 在 $\mathbb{R}_+^*$ 上定义一个距离, 使得它同拓扑群 $\mathbb{R}_+^*$ 是相容的, 并且对于这个群的 “平移” 是不变的.

证明赋以了这个距离的 $\mathbb{R}_+^*$ 是完备的.

140° 用 U 表示使得 $|z|=1$ 的复数 z 的乘法群, 给它赋以由 $\mathbb{C}$ 的拓扑诱导的拓扑.

a) 利用拓扑群 $\mathbb{C}^*$ 同构于乘积 $\mathbb{R}_+^* \times U$ 这个事实, 证明在 $\mathbb{C}^*$ 上存在一个距离, 使得这个距离跟它的拓扑是相容的, 并且对于 $\mathbb{C}^*$ 的 "平移" 是不变的.

b) 证明 $\mathbb{C}^*$ 赋以这个距离后是完备的.

c) 由此推导出下列事实的一个新的证明: (对于乘法) 满足 Cauchy 准则的 $\mathbb{C}^*$ 的元素的所有族在 $\mathbb{C}^*$ 里是可乘的.

赋范代数

141° 证明 $\mathbb{C}$ (看作 $\mathbb{R}$ 上的向量空间) 上的满足关系 $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ 的所有范数恒等于经典范数. 如果仅假定 $\|x^2\| = \|x\|^2$ 有同样的结论吗?

142° 向量空间 $\mathscr{C}^{(n)}([0,1],\mathbb{R})$ 上的范数

$$\|f\| = \sup|f(x)| + \sup|f'(x)| + \cdots + \sup|f^{(n)}(x)|$$

同它的代数结构相容吗?

143° 设 $(a_n X^n)$ 和 $(b_n U^n)$ 是带复系数的两个形式级数, 第二个的系数 $b_0 = 0$.

设 $(c_n U^n)$ 是由形式和 $\sum b_n U^n$ 代换 X 得到的形式级数.

设 A 是一个 Banach 代数; 假定级数 $(a_n X^n)$ 和 $(b_n U^n)$ 的收敛半径分别等于 α 和 β; 令

$$f(x) = \sum a_n x^n \quad 如果\ \|x\| < \alpha;$$
$$g(u) = \sum b_n u^n \quad 如果\ \|u\| < \beta$$

证明对于所有使得 $\|u\| < \beta$ 和 $\sum |b_n| \cdot \|u\|^n < \alpha$ 的 u, 级数 $(c_n u^n)$ 是绝对收敛的, 并且它的和是 $f(g(u))$.

144° 设 A 是一个赋以单位元 e 的 Banach 代数.

a) 证明对于所有使得 $\|u\| < 1$ 的 $u \in A$, 幂级数

$$u - u^2/2 + \cdots + (-1)^{n+1} u^n/n + \cdots$$

是收敛的, 并且它的和在开球 $B(\mathrm{O},1)$ 内是连续的; 把这个和记做 $\operatorname{Log}(e+u)$.

b) 利用前一个题证明

$$\exp(\operatorname{Log}(e+u)) = e + u \qquad 对于\ u \in B(\mathrm{O},1).$$
$$\operatorname{Log}(\exp x) = x \qquad 对于使得\ \|x\| < \frac{1}{2}\ 的\ x.$$

由此推导出开球 $B(\mathrm{O},\frac{1}{2})$ 在映射 $x \to \exp x$ 下的像是 e 的一个开邻域, 并且这个映射在 $B(\mathrm{O},\frac{1}{2})$ 上的限制是全纯的.

准 Hilbert 空间的初等性质

145° 设 f 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间 E 上的任意双线性型. 证明在 E 里存在 $x \neq O$, 使得 $f(x,x)=0$.

146° 设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的一个赋范空间; 证明如果对于 E 的所有 2 维向量子空间 F, F 的范数关联于 F 上的一个数量积, 则 E 的范数也关联于 E 上的一个数量积.

147° 设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的一个赋范空间, 使得对于所有 $x,y \in E$ 有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+\|y\|^2.$$

证明 E 的范数关联于一个数量积.

148° 设 E 为 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间. 称从 E 到 $\mathbb{R}$ 内的所有映射 f 为 E 上的二次型, 如果对于所有 $x,y \in E$ 和所有 $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, 有

$$f(\lambda x+\mu y)=a\lambda^2+2b\lambda\mu+c\mu^2,$$

其中 a,b,c 只依赖 x,y.

证明 $b(x,y)$ 是 E 上的一个双线性型, 并且 $b(x,x)=f(x)$. 由此推导出如果 p 是 E 上的一个范数, 则 p^2 是一个二次型, $b(x,y)$ 是 E 上的数量积, p 是与之关联的范数.

149° 证明 $\mathbb{K}$ 上的所有向量空间 E 可以赋以一个数量积 (利用 E 的代数基).

150° 设 E 是 ($\mathbb{K}$ 上的) 一个向量空间. 从 $E \times E$ 到 $\mathbb{K}$ 内的所有映射 $(x,y) \to f(x,y)$ 称为**半双线性型**, 如果它对于 x 是线性的, 而对于 y 是半线性的.

设 f 是一个赋范空间 E 上的一个半双线性型. 用 $b(f)$ (对应地, $q(f)$) 表示使得

$$|f(x,y)| \leqslant k\ \|x\| \cdot \|y\|, \qquad (\text{对应地}, |f(x,x)| \leqslant k\ \|x\|^2)$$

的正数 k 的下确界.

a) 证明我们有 $q \leqslant b \leqslant 4q$.

b) 证明当 $f(x,x)$ 对于所有 x 是实的时候, 或当 E 的范数关联于一个数量积的时候, 可以把 4 换成 2; 并且证明当这两个条件满足时, 我们有 $q=b$.

151° 设 E 是 $\mathbb{C}$ 上的准 Hilber 空间, 而 f 是 E 上的一个半双线性型.

证明 $(E \setminus \mathrm{O})$ 在映射 $x \to f(x,x)/\|x\|^2$ 下的像是 $\mathbb{C}$ 的一个凸子集. 利用 149 题, 由此推导出对于向量空间 E 上的所有半双线性型 f, $(E \setminus \mathrm{O})$ 在映射 $x \to f(x,x)$ 下的像是凸的.

152° 设 E,F 是 $\mathbb{K}$ 上的两个准 Hilber 空间, 而 f 是从 E 到 F 内的一个映射, 使得 $f(\mathrm{O})=\mathrm{O}$, 并且对于所有 $x,y \in E$ 有

$$\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\| \quad (\text{即 } f \text{ 是一个等距}).$$

证明 f 是线性的.

153° 证明仅当 E 本身是准 Hilbert 空间时, 在 82 题定义的空间 $l_I^2(E)$ 的范数, 才能用一个数量积定义.

154° 设 $(E_i)_{i\in I}$ 是同一个域 $\mathbb{K}$ 上的准 Hilbert 空间的一个族, 用 $(x|y)_i$ 表示 E_i 的数量积, 用 $\|x\|_i$ 表示其范数. 用 F 表示族 $x=(x_i)_{i\in I}$ 的向量空间, 其中对于每个 i 有 $x_i\in E_i$, 对于所有 $x\in F$, 令

$$f(x)=\sum_i (x_i|y_i)_i.$$

a) 证明使得 $f(x)<\infty$ 的 x 的集合 E 是 F 的向量子空间.

b) 证明对于所有 $x,y\in E$, $(x_i|y_i)_i$ 的族是可和的, 记它的和为 $(x|y)$, 这是 E 上的一个数量积.

c) 证明当每个 E_i 完备时, 准 Hilbert 空间 E (称之为 E_i 的 Hilbert 和) 是完备的 (及其逆).

155° 设 f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}$ 内的一个映射, 使得

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt<\infty.$$

证明对于所有 $a\in\mathbb{R}$ 有

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)f(t-a)dt\right|\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt.$$

156° 设 (a_n) 是 $\mathbb{C}$ 的元素的一个序列, 使得 $\sum |a_n|^2<\infty$. 证明

$$\left|\sum a_n a_{n+1}\right|\leqslant \sum |a_n|^2.$$

157° 用 P 表示 $\mathbb{R}$ 上的 Hilbert 空间 l^2 的由使得 $|x_n|\leqslant 1/n$ 的点 $x=(x_n)$ 组成的子集.

证明 P 是 l^2 的紧致子集 (可以利用距离空间的紧致性判别法和命题 9-23).

158° 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个总体积有限的区域, 而 E 是 D 上的这样的实调和函数 f 的集合, f^2 在 D 上的积分是有限的.

a) 证明 E 是一个向量空间, 并且

$$(f|g)=\int_D f(x)g(x)dx$$

是 E 上的一个数量积. 用 $\|f\|$ 表示对应的范数.

b) 证明对于所有 $f\in E$ 有

$$\int_D |f(x)|dx\leqslant k\ \|f\|,$$

其中 k 表示一个有待确定的常数.

c) 利用调和函数的初等的平均值性质证明, 如果 $\lim_{n\to\infty}\|f_n\| = 0$, 则 f_n 的序列在所有紧致子集上一致收敛到 O.

d) 由此推导出准 Hilbert 空间 E 是完备的.

159° 设 F, G 是实准 Hilbert 空间 E 的两个向量子空间. 证明如果存在一个数 $k \geqslant 0$, 使得对于所有 $x \in F$ 和所有 $y \in G$ 有

$$|(x|y)| = k\ \|x\| \cdot \|y\|,$$

则或者 F 和 G 是 1 维的, 或者 $k = 0$, 即 F 和 G 是正交的.

160° 设 E 是 $\mathbb{K}$ 上的一个准 Hilbert 空间, 而 F, G 是 E 的两个不退缩为 $\{O\}$ 的向量子空间. 称由

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi; \qquad \cos\alpha = \sup\frac{|(u|v)|}{\|u\|\cdot\|v\|} \qquad \text{其中 } u \in F, v \in G$$

确定的角为 F, G 的**夹角**. 用 φ 表示从赋范空间 $F \times G$ 到 E 的子空间 $(F+G)$ 的映射 $(u, v) \to u + v$.

证明 φ 是同胚的必要且充分的条件是 $\alpha \neq 0$.

161° 设 X, Y 是同构于 l^2 的两个赋范空间; 而 φ 是从 X 到 Y 内的映射, 其定义是:

如果 $x = (x_n)$, 则 $\varphi(x)$ 是点 $(n^{-1}x_n)$.

证明 φ 在 $X \times Y$ 里的图像 Γ 是 $X \times Y$ 的同构于 X 的闭向量子空间.

证明: 如果用 X' 表示 $X \times Y$ 的子空间 $X \times O$, 则 $(X' + \Gamma)$ 在 $X \times Y$ 内是处处稠密的, 但不等于 $X \times Y$.

162° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个准 Hilbert 空间, 而 $E \times E$ 赋以了其因子空间的 Hilbert 和结构 (参见 154 题). 设 f 是从 E 到 E 上的保持范数的线性双射.

对于所有 $k \in \mathbb{R}$, 用 $\Gamma(k, f)$ 表示从 E 到 E 的映射 $x \leftrightarrow kf(x)$ 在 $E \times E$ 里的图像. 证明 $\Gamma(k, f)$ 的所有向量同 $\Gamma(k', f)$ 的夹角 α 是由关系

$$\cos\alpha = \frac{|1 + kk'|}{(1+k^2)^{\frac{1}{2}}(1+k'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

定义的一个常数.

正交投影. 对偶空间的研究

163° 设 X 是 $\mathbb{R}$ 上的准 Hilbert 空间 E 的一个完备凸子集. 利用定理 15-1, 证明 X 是 E 的闭仿射半空间 (定义为形式为 $\{x : f(x) \leqslant k\}$ 的集合, 其中 $f \in E', k \in \mathbb{R}$) 的交集.

证明当 X 是一个锥时, X 是形式为 $\{x : f(x) \leqslant 0\}$ 半空间的交, 其中 $f \in E'$.

164° 设 (X_n) 是一个准 Hilbert 空间 E 的完备凸集的递减序列. 对于所有 $x \in E$, 用 $d_n(x)$ 表示从 x 到 X_n 的距离, 令

$$d(x) = \lim_{n\to\infty} d_n(x).$$

证明如果至少对于一个 x 有 $d(x) < \infty$, 则对于所有的 x 有 $d(x) < \infty$; 以下就假定处于这种情形下. 用 $A(x, \varepsilon, n)$ 表示 X_n 同中心为 x 半径为 $(d(x)+\varepsilon)$ 的闭球的交集.

a) 证明当 ε 趋于 0 并且 n 趋于 $+\infty$ 时, $A(x, \varepsilon, n)$ 的直径趋于 0.

b) 由此推导出 X_n 的交集 X 不是空集, 并且

$$d(x) = d(x, X).$$

165° 设 Y 是准 Hilbert 空间 E 的一个完备且有界的凸集, 而 f 是 Y 上的凸的和下半连续的数值函数. 利用上题证明 f 在 Y 上是有下界的, 并且 Y 的使得 f 达到下确界的点的集合是一个非空的完备凸集.

给出这个性质对于 E 上的连续线性型的一个应用, 并且同 43 题中的例子比较.

166° 设 A, B 是准 Hilbert 空间 E 的两个完备凸集, 其中至少有一个是有界的. 证明存在 $a \in A$ 和 $b \in B$, 使得

$$d(a, b) = d(A, B).$$

167° 推广上题到下列情形: A 和 B 不是有界的, 但是当 $x \in A, y \in B, \|x\|$ 和 $\|y\|$ 趋于无穷时, $d(x, y)$ 趋于无穷. 通过 $\mathbb{R}^2$ 中的一个例子证明, 如果这个条件不满足, 断言可能不成立.

168° 设 (C_n) 是准 Hilbert 空间 E 的完备凸子集的一个递减序列, 使得 $C = \overline{\bigcup C_n}$ 还是完备的.

对于所有 $x \in E$, 用 $P_n(x)$ (对应地, $P(x)$) 表示 x 在 C_n (对应地, C) 上的投影; 证明

$$P(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

169° 设 E 是 $\mathbb{R}$ 上的一个准 Hilbert 空间, C 是 E 的一个完备凸子集, 而 f 是 E 上的一个连续线性型.

证明存在 C 的唯一的点使得 $\|x\|^2 + f(x)$ 在该点达到下确界.

170° 设 E 是准 Hilbert 空间, E' 是它的拓扑对偶空间. 对于所有 $a \in E$, 用 φ_a 表示 E 上的线性型 $x \to (x|a)$. 证明 E 在半线性映射 φ 下在 E' 里的像 $\varphi(E)$ 是 E' 的一个处处稠密的向量子空间.

由此推导出所有准 Hilbert 空间同构于一个 Hilbert 空间的处处稠密的子空间.

171° 设 V_1, V_2 是准 Hilbert 空间 E 的两个仿射流形, 而 $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$.

证明下列性质的等价性:

a) $d(x_1, x_2) = d(V_1, V_2)$.

b) $(x_1 - x_2)$ 正交于 V_1 和 V_2.

172° 设 E 是一个实 Hilbert 空间, 而 P 是 E 的一个闭凸锥. 用 P^* 表示使得对于所有 $y \in P$ 有 $(x|y) \leqslant 0$ 的 $x \in E$ 的集合.

证明 P^* 也是一个闭凸锥, 并且 $(P^*)^* = P$(利用 163 题).

173° 设 E 是一个实 Hilbert 空间, 而 P, Q 是 E 的两个闭凸锥, 使得 $P^* = Q$ (由此根据上题也有 $Q^* = P$).

证明下列性质的等价性:

a) $z = x + y, \quad x \in P, \quad y \in Q; \quad (x|y) = 0$.

b) $x = z$ 在 P 上的投影; $\quad y = z$ 在 Q 上的投影.

*174° 设 E 是一个准 Hilbert 空间, 而 F 是 E 的一个向量子空间, 使得 $F = F^{00}$. 用一个例子证明未必所有 $x \in E$ 的点都有在 F 上的投影 $P(x)$.

175° 设 P 是从一个准 Hilbert 空间 E 到自身的一个映射, 它对于所有 $x, y \in E$ 满足关系

$$(P(x)|y) = (x|P(y)); \qquad P(P(x)) = P(x).$$

证明 P 是线性的和连续的; 再证明如果令

$$F = \{x : P(x) = x\},$$

则有 $F = F^{00}$, 并且 P 等于从 E 到 F 上的投影算子.

176° 设 E 是一个准 Hilbert 空间. 证明如果 P 是从 E 到 E 内的一个线性映射, 使得 $P^2 = P$, 并且 $\|P\| \leqslant 1$, 则 P 是一个投影算子.

177° a) 证明如果 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是在一个准 Hilbert 空间上的投影算子, 则 $(P_1 + P_2 + \cdots + P_n)$ 是一个投影算子等价于对于所有 $i \neq j$ 有 $P_i \circ P_j = O$.

b) 现在假定 E 是完备的. 证明如果 (P_n) 是投影算子的一个无穷序列, 使得对于所有 $i \neq j$ 有 $P_i \circ P_j = O$. 则 P_n 的族在 $\mathscr{L}(E)$ 里是可和的, 并且其和是一个投影算子.

178° 设 E 是一个 Hilbert 空间, 而 A 是 $\mathscr{L}(E)$ 的一个元素.

a) 证明对于所有 $y \in E$, 映射 $x \to (Ax|y)$ 是 E 上的一个线性型; 由此推导出存在 E 的唯一的元素 A_y^*, 使得对于所有 $x \in E$ 有 $(Ax|y) = (x|A_y^*)$.

b) 证明从 E 到 E 内的映射 $y \to A_y^*$ 是线性的, 并且 A^* 的范数等于 A 的范数.

称 A^* 为算子 A 的**伴随**算子; 如果 $A = A^*$, 或者说如果对于所有 $x, y \in E$ 有等式

$$(Ax|y) = (x|Ay)$$

则说 A 是**自伴的**(或 Hermite 的).

c) 更一般地, 设 E 是准 Hilbert 空间, 而 $A, B \in \mathscr{L}(E)$; 如果对于所有 $x, y \in E$ 有 $(Ax|y) = (x|By)$, 则说 B 是 A 的**伴随**算子.

证明所有 $A \in \mathscr{L}(A)$ 至多具有一个伴随算子, 如果 B 是 A 的伴随算子, 则 A 是 B 的伴随算子.

179° 证明下列初等性质:

a) $(AB)^* = B^*A^*$.

b) 如果 A 和 B 是自伴的, 则 AB 也是自伴的等价于 $AB = BA$.

c) 如果 A 是自伴的, 则对于任意 B, B^*AB 也是自伴的.

d) 如果 $A = A^*$, 则对于所有 x 有 $(Ax|x) = 0$ 等价于 $A = \mathrm{O}$.

e) $A = A^*$ 等价于对于所有 x,$(Ax|x)$ 是实数.

180° 设 $(k_i)_{i\in I}$ 是 $\mathbb{C}$ 的元素的一个有界族, 而 A 是从复空间 l_I^2 到自身的映射, 其定义是:

如果 $x = (x_i)_{i\in I}$, 则 Ax 是元素 $(k_i x_i)_{i\in I}$.

A 的范数是什么? 它的伴随算子是什么? 何时 A 是自伴的?

181° 用 E 表示赋以了数量积

$$(x|y) = \int_0^1 x(t)\overline{y}(t)dt$$

的空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$; 设 $k \in E$ 和 $K \in \mathscr{C}([0,1]^2,\mathbb{C})$. 用关系式

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t,u)x(u)du; \qquad Bx(t) = k(t)x(t)$$

定义 $\mathscr{L}(E)$ 的元素 A, B.

a) 证明虽然 E 不是完备的, A, B 却具有伴随算子; 在什么条件下, A 和 B 是自伴的?

b) 对于所有 $x \in E$, 令

$$Cx(t) = \int_0^1 k(t)u^{-\frac{1}{4}}x(u)du, \qquad \text{其中 } k \in E.$$

证明 $C \in \mathscr{L}(E)$, 并且计算它的范数, 再证明 C 没有作用在 E 上的伴随算子.

182° 设 E 是一个准 Hilbert 空间, 而 A 是 $\mathscr{L}(E)$ 的一个元素, 它有一个伴随算子 A^*; 如果 $A = A^*$, 并且对于所有 $x \in E$ 有 $(Ax|x) \geqslant 0$, 则说 A 是**半正定的**. 如果此外对于所有 $x \neq \mathrm{O}$) 有 $(Ax|x) > 0$, 则说 A 是**正定的**.

刻画在前面几个例子所研究的算子中的正算子和正定算子的特征.

183° 设 E 是一个准 Hilbert 空间, 而 $A \in \mathscr{L}(E)$. 证明以下三个断言的等价性:

a) $A^*A = I$ (其中 I 是恒等映射).

b) 对于所有 $x, y \in E$ 有 $(Ax|Ay) = (x, y)$.

c) 对于所有 $x \in E$ 有 $\|Ax\| = \|x\|$.

当 A 具有这些性质时, 就说 A 是**酉的**(如果域 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{R}$, 或称正交的), 或更简单地称之为等距算子.

184° 设 E 是一个准 Hilbert 空间, 而 $A \in \mathscr{L}(E)$; 如果 $(I+A)/2$ 是一个投影算子, 则说 A 是**对称算子**.

利用前一个题和 175 题, 证明对称算子就是同时是酉的和自伴的算子.

185° 设 (x_n) 是准 Hilbert 空间 E 的点的一个序列; 证明 (x_n) 强收敛到 O 和序列 $(x_n|a)$ 对于使得 $\|a\| \leqslant 1$ 的 a 的集合一致收敛于 0, 二者是等价的. 推广这个性质到滤子基.

*186° 设 (x_n) 是 Hilbert 空间 E 的点的一个序列, 使得对于所有 $a \in E$, 序列 $(x_n|a)$ 有极限. 证明: 序列 (x_n) 弱收敛到 E 的一个点 x, $(\|x_n\|)$ 是有界的, 并且 $\|x\| \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$.

(可以利用 60 题和 61 题.)

*187° 设 (x_n) 是准 Hilbert 空间 E 的点的一个序列. 证明如果这个序列弱收敛到一个点 x, 则存在一个子序列 (x_{α_n}), 使得由

$$b_n = 1/n \sum_{1}^{n} x_{\alpha_p}$$

定义的 b_n 的序列 (b_n) 强收敛到 x.

188° 证明在一个无穷维的准 Hilbert 空间 E 里, 点 O 没有对于弱拓扑的邻域的可数基. 由此推导出 E 的弱拓扑不能用距离定义.

189° 设 E 是一个准 Hilbert 空间; (x_n) 是 E 的点的一个**有界**序列; 而 X 是 E 的一个完全子集.

证明: 为了序列 (x_n) 弱收敛到一个点 x, 必须且只需对于所有 $a \in X$, 序列 $(x_n|a)$ 收敛到 $(x|a)$. 反之, 证明可以在 l^2 里找到一个无界序列 (x_n) (从而不可能弱收敛) 和一个完全子集 X (比如 l^2 的典则标准正交基), 使得对于所有 $a \in X$, 序列 $(x_n|a)$ 收敛到 0.

190° 设 E 是赋以了数量积

$$(x|y) = \int_0^1 x(t)\overline{y}(t)dt$$

的空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$. 令

$$x_n(t) = \sin \pi nt;$$

利用 E 的由函数 $\sin \pi pt$ 以及 $\cos \pi pt$ 组成的完全子集 X 和上题, 证明序列 (x_n) 弱收敛到 O.

更一般地, 设 (x_n) 是一个函数序列, 导数 x'_n 在 $[0,1]$ 连续, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_t |x_n(t)|\right) = 0;$$

证明在 E 里序列 (x'_n) 弱收敛到 O.

正交系

191° 设 E 是一个准 Hilbert 空间; 对于 E 的点的所有有限序列 $(x_1, x_1, \cdots, x_n)$, 称数量积 $(x_i|x_j)$ 的行列式 $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 x_i 的 Gram **行列式**.

a) 证明 $G(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0$, 并且关系式 $G(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0$ 等价于诸 x_i 是线性无关的 (利用由 x_i 生成的向量空间的标准正交基).

b) 证明如果诸 x_i 是线性无关的, 则 E 的任意一个点 x 到由 x_i 生成的向量空间 L 的距离的平方等于 $G(x, x_1, \cdots, x_n)/G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. (利用 x 在 L 上的投影.)

192° 证明所有无穷维 Hilbert 空间 E 同构于 E 的一个与 E 不同的向量子空间.

193° 设 E 是一个准 Hilbert 空间, 赋以了一个无穷标准正交基 B, 证明对于 E 的所有的处处稠密子集 X 有 $\overline{\overline{X}} \geqslant \overline{\overline{B}}$, 并且证明存在一个 X, 使得 $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{B}}$.

194° 设 E 是任意一个拓扑向量空间, 而 $(a_i)_{i\in I}$ 是 E 的元素的一个族. 如果对于所有 $i \in I$, a_i 不属于由指标 $j \neq i$ 的元素 a_j 生成的向量子空间, 则说这个族是**拓扑线性无关的**.

a) 证明在一个准 Hilbert 空间里, 所有的正交族是拓扑线性无关的.

b) 证明所有拓扑线性无关族是代数线性无关的, 通过一个例子证明其逆不真.

195° 设 E 是一个拓扑向量空间, B 是 E 的一个代数基, 它是拓扑线性无关的. 证明 E 的由 B 的任意子集生成的向量子空间是闭的.

a) 利用 65 题, 由此推导出如果 E 是一个 Banach 空间, 则 E 必定是有限维的.

b) 给出一个这样的例子, B 是无穷的, 而 E 是赋范的 (必定是不完备的).

196° 设 E 是一个拓扑向量空间. 我们说 E 的一个子集 A 是**拓扑十分线性无关的**, 如果它不含有 O, 并且对于 A 的所有由非空子集 A_1, A_2 组成的划分, 由 A_1 和 A_2 生成的向量空间的闭包的交集为 {O}.

a) 验证准 Hilbert 空间的所有正交系是拓扑十分线性无关的.

b) 验证所有空间 l_I^p 的典范 “基” 也具有这个性质.

*c) 用例子证明, 即使在一个准 Hilbert 空间里, 一个族可能是拓扑线性无关的, 但不是拓扑十分线性无关的.

197° 设 E 是赋以了数量积

$$(x|y) = \int_0^1 x(t)y(t)$$

的空间 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 设 K 是 $[0,1]$ 的一个非空且非稠密的紧致子集; 用 A_K 表示由在 K 的所有的点取零的函数组成的 E 的向量子空间.

a) 证明使得 $x \perp A_K$ 的所有 $x \in E$ 是 O.

b) 证明如果 K 的测度是零 (其意义是: 对于所有 $\varepsilon > 0$, 存在 K 的一个长度之和小于 ε 的有限区间族构成的覆盖), 则有 $\overline{A_K} = E$. 否则, 证明 $\overline{A_K} \neq E$.

c) 由此推出在 E 里存在非完全的最大正交系.

198° 设 E 是实空间 l^2 的由 l^2 的典范基的指标为奇数的向量和向量

$$x_k = (1/1^k, \cdots, 1/n^k, \cdots) \quad (\text{其中 } k \in \mathbb{N}^*)$$

生成的向量子空间.

证明在 E 里, 由 l^2 的典范基的奇数指标的向量组成的正交系是最大的.

199° 设 E 是非完备的准 Hilbert 空间. 利用 170 题证明, 在 E 里存在一个闭超平面 H, 使得不存在 $x \neq O$ 的任何 $x \in E$ 正交于 H.

200° 设 $\mathscr{B}_2$ 是在 59 题定义的 2 阶 Besicovitch 空间. 对于所有 $x, y \in \mathscr{B}_2$, 令

$$[x, y] = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |x(t)y(t)| dt.$$

a) 证明 $[x, y] < \infty$, 并且更明确地有 $[x, y] \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

证明 $[x, y]$ 在 35 题的意义下是次数量积.

b) 设 A 是 S_2 (参见 59 题) 的一个向量子空间. 证明对于所有 $x, y \in A$,

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} x(t)\overline{y}(t) dt$$

当 $a \to \infty$ 时有一个极限, 记之为 $(x|y)$. 由此推导出 A 在 $\mathscr{B}_2$ 里的典范像是一个准 Hilbert 空间.

c) 用 P 表示函数 $e^{i\lambda t}$ (其中 $\lambda \in \mathbb{R}$) 的线性组合的向量空间.

证明 $P \subset S_2$, 并且证明函数 $e^{i\lambda t}$ 的族是准 Hilbert 空间的一个标准正交系.

由此推导出 P 在 $\mathscr{B}_2$ 里的典范像的闭包 $\mathscr{P}$ 是一个 Hilbert 空间, 其 Hilbert 维数等于连续统的势.

d) 证明 $\mathscr{P}$ 的所有元素 x 是函数 $a_n e^{i\lambda_n t}$ (其中 λ_n 是不同的) 的一个序列的和, 这里 $\sum |a_n|^2 < \infty$; 反之, 所有这类的序列在 $\mathscr{P}$ 里是可和的.

e) 令 $a_n = n^{-2}$, λ_n 任意, 再令 $a_n = n^{-1}, \lambda_n = n^{-1}$, 依次研究这样得到的序列.

怎样解释在第二个序列中遇到的困难?

正交多项式

201° 设 E 是由使得

$$\int_0^1 t^{-1} x^2(t) dt < \infty$$

的函数 x 组成的 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 的子集.

a) 证明 E 是 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 的一个向量子空间, 还证明所有在 $x=0$ 有有限导数并且 $x(0)=0$ 的函数 x 属于 E.

b) 对于所有 $x,y\in E$, 令

$$(x|y)=\int_0^1 t^{-1}x(t)y(t)dt.$$

验证这个积分有意义并且这是 E 上的一个数量积.

c) 把 Gram-Schmidt 正交化算法应用到序列 (t^n) (其中 $n\geqslant 1$) 中提供多项式 $P_1,\cdots,P_n,\cdots$. 明确计算 P_1,P_2,P_3.

d) 证明在准 Hilbert 空间 E 里, 在形式如 $[0,a]$ (其中 $a\neq 0$) 的区间上为零的函数 x 的集合是处处稠密的. 由此推导出正交族 (P_n) 在 E 里是完全的.

202° 考虑在上一题中用 $t^{-\alpha}$ (其中 $\alpha\in\mathbb{R}_+$) 代替 t^{-1} 后的同样的问题.

203° 设 p 是一个在区间 $I=(-1,1)$ 上大于等于 0 且连续的函数, 使得

a) I 的使得 $p(x)\neq 0$ 的点 t 的集合在 I 是处处稠密的.

b) 存在一个不恒等于零的多项式 A 使得

$$\int_I A^2(t)p(t)dt<\infty.$$

设 E 是由使得

$$\|x\|^2=\int_I x^2(t)p(t)dt<\infty$$

的函数 x 组成的 $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ 的向量子空间.

用类似于 201 题的方法证明形式如 $A\cdot P$ (其中 P 是一个多项式) 的集合在赋以了 Hilbert 范数 $\|x\|$ 的空间 E 里是完全的.

204° 令

$$Q_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$

a) 利用分部积分法证明多项式 Q_n 的序列在 $[-1,1]$ 上对于数量积

$$(x|y)=\int_{-1}^1 x(t)\overline{y}(t)dt$$

是正交的, 并且

$$(Q_n|Q_n)=\frac{2}{2n+1}.$$

b) 验证 $Q_n(1)=1$, 并且由此推导出 Q_n 跟本章 17-3, 17-4, 1° 中定义的 Legendre 多项式 P_n 由关系

$$Q_n(t)=P_n(t)/P_n(1)$$

联系起来, 计算 $P_n(1)$.

c) 证明 Q_n 满足递推关系

$$nQ_n = (2n-1)Q_{n-1} - (n-1)Q_{n-2},$$

并且满足微分方程

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dQ_n}{dt}\right) + n(n+1)Q_n = 0.$$

205° 设 E 是对于 $p(t) = e^{-t}$ 在区间 $[0,\infty)$ 上得到的准 Hilbert 空间 E_p(见 17-3).

a) 令

$$L_n(t) = \frac{1}{n!}e^t \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n).$$

验证 L_n 是一个 n 阶多项式, 组成 E 里的一个正交系, 并计算 $(L_n|L_n)$.

b) 验证 $L_n(0) = 1$, 由此推导出 L_n 跟本章 17-3, 17-4, 2° 中定义过的 Laguerre 多项式 P_n 由关系

$$L_n(t) = P_n(t)/P_n(0)$$

联系起来, 并且计算 $P_n(0)$.

c) 证明对于所有 $\alpha \geqslant 0$, 函数 $e^{-\alpha t}$ 属于 E, 并且计算它对于正交系 (L_n) 的 Fourier 系数 $\gamma_{n,\alpha}$.

d) 证明 $\gamma_{n,\alpha}L_n$ 的族在 E 里以函数 $e^{-\alpha t}$ 作为和.

e) 通过适当的变量替换和 Stone-Weierstrass 定理证明, 函数 $e^{-nt}(n \in \mathbb{N})$ 组成 E 的一个完全系.

f) 从问题 e) 和 d) 推导出多项式 L_n 组成 E 的一个正交基.

206° a) 验证 e^{-t^2} 的 n 阶导数的形式是 $(-1)^n H_n(t)e^{-t^2}$, 其中 H_n 是 n 阶多项式.

b) 证明多项式 H_n 在关联于权 $p(t) = e^{-t^2}$ 和区间 $[0,\infty)$ 的空间 E_p 里是正交的. 由此推导出它们是正比于本章 17-3, 17-4, 3° 中的 Hermite 多项式.

c) 验证递推关系:

$$H_n = 2tH_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2}; \qquad H_0 = 1; \qquad H_1(t) = 2t.$$

d) 证明 H_n 满足微分方程

$$H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0$$

和

$$H_n' = 2nH_{n-1}.$$

VI. 第三章的法汉术语对照和索引[1]

[1]表中的数字表示节和段, 或者某一习题的序号.

记 号

VII. 参 考 文 献

BOURBAKI, N., *Topologie générale, groupes topologiques; nombres réels*, 第三, 四章, n ° 906.

—, *Espaces vectoriels topologiques*, ch. 1 和 2, n° 1189.

—, *Algèbre, formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, ch. 9, n° 1272. Actualités Sci. et Ind., Hermann et Cie, Paris.

DIEUDONNÉ, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.

HALMOS, P., *Finite dimensional vector spaces*, D. Van Nostrand, New York, 1958.

—, *Introduction to Hilbert space*, New York, 1951.

LAWRENCE GRAVES, *The theory of functions of real variables*, MacGraw Hill, Book Company, 1956.

E. J. MACSHANE et P. A. BOTTS, *Real Analysis*, Van Nostrand, Princeton 1959.

OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung*, Bâle, 1951.

更高水平的著作 (研究水平):

DUNFORD, N. et SCHWARTZ, J. T., *Linear operators* I, Interscience Publ., 1958.

FRIEDRICHS, *Functional Analysis and applications*, New York University, 1949.

HILLE et PHILLIPS, *Functional Analysis and semi-groups*, Colloquium Publ., 1957.

LOOMIS, L., *An introduction to abstract harmonic Analysis*, D. Van Nostrand, N.Y., 1958.

RIESZ, F. et NAGY, B. S., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Académie des Sciences, Budapest, 1952.

STONE, M. H., *Linear transformations in Hilbert space*, Colloquium Publ., 1932.

VIII. 定义和公理

这里仅涉及 $\mathbb{K}$ (其中 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的向量空间.

拓扑向量空间的公理. 一个拓扑向量空间是赋以了向量空间的结构和拓扑结构的一个集合 E, 使得:

EVT1: E 的拓扑同 E 的加法群结构是相容的;

EVT2: 从 $\mathbb{K}\times E$ 到 E 内的映射 $(\lambda, x)\to\lambda x$ 是连续的.

完全集. 拓扑向量空间 E 的一个子集 X 是**完全的**, 如果 X 的元素的线性组合的集合在 E 里是处处稠密的.

半范数. 向量空间 E 上的一个**半范数**是从 E 到 $\mathbb{R}_+$ 的一个映射 p, 使得对于所有 $x, y\in E$ 和所有 $\lambda\in\mathbb{K}$ 有:

1. $$p(\lambda x)=|\lambda|p(x);$$
2. $$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y).$$

如果对于所有 $x\neq O$ 有 $p(x)\neq 0$, 则说 p 是一个**范数**.

称形式如 $\{x: p(x-a)<\rho\}$ 的所有集合为 E 的中心为 a 的 p **开球**, 其中 $\rho>0$.

向量空间 E 上的 $\mathscr{P}$ 拓扑. 设 $\mathscr{P}=(p_i)$ 是 E 上的半范数的一个族. 称中心为 a 的 p_i 开球的所有有限交为 E 内的中心为 a 的 $\mathscr{P}$ **开球**.

称开集是 $\mathscr{P}$ 开球的任意并集的拓扑为 E 上的 $\mathscr{P}$ **拓扑**.

赋范空间. 称所有赋以了一个范数 p 的向量空间为**赋范空间**.

为赋范空间赋以关联于距离 $d(x,y)=p(x-y)$ 的拓扑.

当它对于这个距离是完备的, 则称它为 Banach **空间**.

在交换和分离拓扑群 G 里的可和族. 说 G 的元素的一个族 $(a_i)_{i\in I}$ **是可和的**并且**和**为 A (其中 $A\in G$), 如果对于 A 的所有邻域 V, 存在 I 的一个有限子集 J_0, 使得对于 I 的所有包含 J_0 的有限子集 J 有

$$\sum_{i\in J} a_i \in V.$$

赋范空间 E 里的绝对可和族. 说 E 的元素的一个族 (a_i) 是**绝对**可和的, 如果它们的范数 $\|a_i\|$ 的族在 $\mathbb{R}$ 里是可和的.

在 $\mathbb{C}$ 里可乘积族. $\mathbb{C}$ 的元素的一个族 $(a_i)_{i\in I}$ 在 $\mathbb{C}$ 里是**可乘积的**, 并且乘积为 p, 如果对于所有 $\varepsilon>0$, 存在 I 的一个有限子集 J_0, 使得对于 I 的所有包含 J_0 的有限子集 J 有

$$|p-\prod_{i\in J} a_i|\leqslant \varepsilon.$$

赋范代数. 称 $\mathbb{K}$ 上的赋以了满足条件 $\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$ 的范数的所有代数为**赋范代数**.

当它此外还对这个范数是完备时, 就称之为 **Banach 代数**.

Hermite 型. 向量空间 E 上的一个 **Hermite 型**是从 $E\times E$ 到 $\mathbb{K}$ 内的一个映射 φ, 使得

1. 对于所有 $y, \varphi(x,y)$ 对于 x 是线性的.
2. 对于所有 $x,y\in E$ 有 $\varphi(y,x)=\overline{\varphi(x,y)}$.

说它是**正的**, 如果对于所有 x 有 $\varphi(x,x)\geqslant 0$; 说它是**正定的**, 如果此外对于所有 $x\neq O$ 有 $\varphi(x,x)>0$; 在后一情形下, 人们证明了 $(\varphi(x,x))^{\frac{1}{2}}$ 是 E 上的一个范数.

准 Hilbert 空间. 称所有赋以了正定 Hermite 型一般记作 $(x(y))$ 和关联于这个型的范数的向量空间 E 为**准 Hilbert 空间**.

如果 E 对于这个范数是完备的, 则称之为 **Hilbert 空间**.

正交基. 准 Hilbert 空间 E 的非零元素的任一个族 (a_i) 称为**正交基**, 如果

1. 这个族在 E 里是完全的;
2. 诸 a_i 是两两正交的 (即如果 $i\neq j$, 则 $(a_i|a_j)=0$).

当对于所有 i 还有 $\|a_i\|=1$ 时, 则说基是**标准正交的**.

法兰西数学精品译丛

•数学天元基金资助项目•

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
★24308-6	解析函数论初步	H. 嘉当
★25156-2	微分学	H. 嘉当
	广义函数论	L. 施瓦尔兹
★25801-1	微分几何 —— 流形、曲线和曲面（修订第二版）	M. 伯杰、B. 戈斯丢
★26362-6	拓扑学教程 —— 拓扑空间和距离空间、数值函数、拓扑向量空间 (第二版)	G. 肖盖
	代数教程	R. 戈德曼
★25155-5	谱理论讲义	J. 迪斯米埃
★24619-3	拟微分算子和 Nash-Moser 定理	S. 阿里纳克、P. 热拉尔
	解析数论	G. 特伦鲍姆
	概率与位势	C. 德拉歇利、P. 梅耶

说明：加★者已出版.